CÁLCULO 1

05/03/24 – AULA 22

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR:

Def: Se f for uma função n vezes derivável, definimos a derivada de ordem n de f por

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Ex: $f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \left(\left(f'(x)\right)'\right)'$

Outras notações:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = D_x^n f.$$

Ex: Obter a derivada de ordem 4 de $f(x) = e^{2x} + x^2$

SOLUÇÃO:

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

$$f(x) = e^{2x} + x^2$$

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 + 2x = 2 \cdot e^{2x} + 2x$$

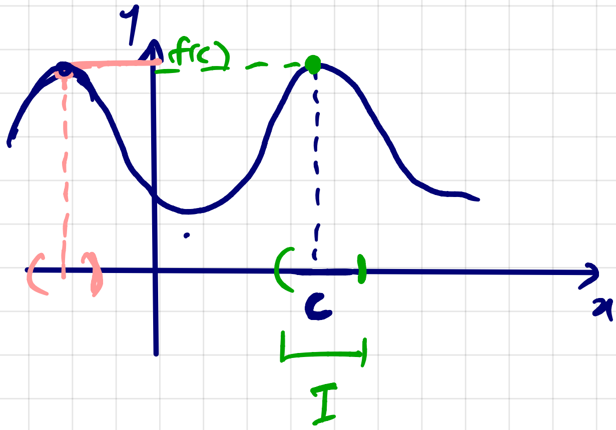
$$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 + 2 = 4 \cdot e^{2x} + 2$$

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{2x} \cdot 2 + 0 = 8 \cdot e^{2x}$$

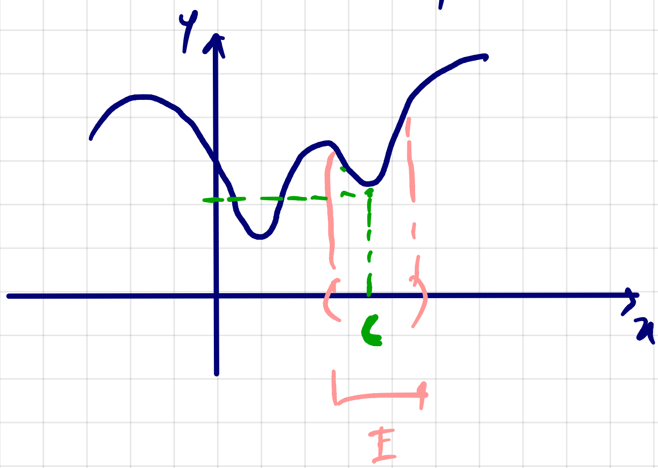
$$f^{(4)}(x) = 8 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 16 \cdot e^{2x}$$

EXTREMOS RELATIVOS E ABSOLUTOS:

Def.: Seja f uma função. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um ponto de MÁXIMO RELATIVO se existir um intervalo I contendo c tal que $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in I$.



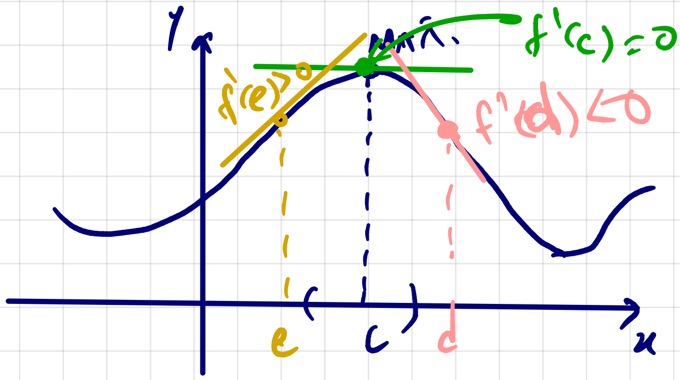
Def.: Seja f uma função. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um ponto de MÍNIMO RELATIVO se existir um intervalo I contendo c tal que $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in I$.



Def.: Um ponto de MÁXIMO relativo ou MÍNIMO relativo é chamado de EXTREMO relativo de uma função.

PROPOSIÇÃO: Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função derivável.

Se $c\in(a,b)$ for um extremo relativo, então $f'(c)=0$.



DEMONSTR.: Seja f uma função derivável e c um extremo relativo. Sem perda de generalidade, assuma que seja um ponto de MÁXIMO RELATIVO.

Sendo f derivável, então $\exists\, f'(c)$. Disso, segue que as derivadas laterais em c existem e são iguais. Assim:

- $$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{>0}} \leq 0$$

$x-c>0$, pois $x\to c^+$

$f(c)\geq f(x),\ \forall x\in I$

$\Rightarrow f(x)-f(c)\leq 0$

c x

- $$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{<0}} \geq 0$$

$x - c < 0$, pois $x \to c^-$

$x \quad c$

$f(c) \geq f(x)$, pois c é ponto de máximo relativo.

$$f'_-(c) \geq 0$$

Ou seja, obtemos $f'_-(c) \geq 0$ e $f'_+(c) \leq 0$

$$\Rightarrow f'(c) = 0. \qquad \square$$

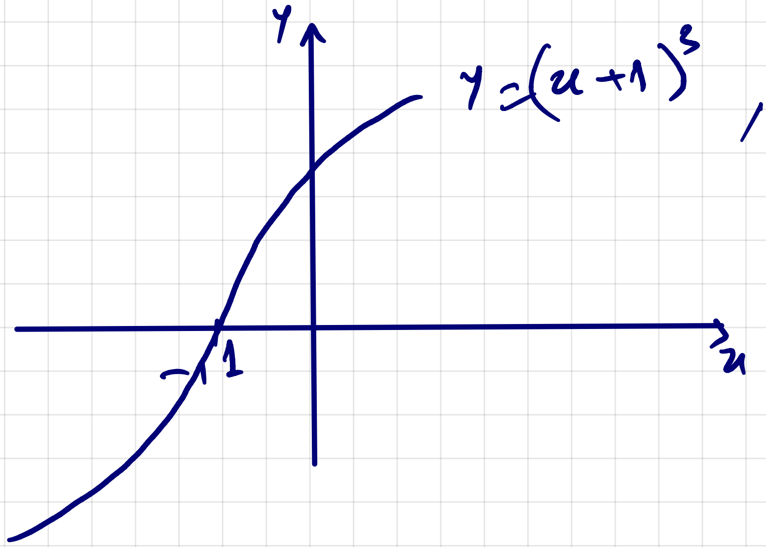
Obs: A recíproca, em geral, é falsa. Ou seja, o fato de se ter $f'(c) = 0$ não implica em c ser um ponto de extremo relativo.

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^3$.

Note que $f'(x) = 3 \cdot (x+1)^2 \cdot 1 = 3(x+1)^2$

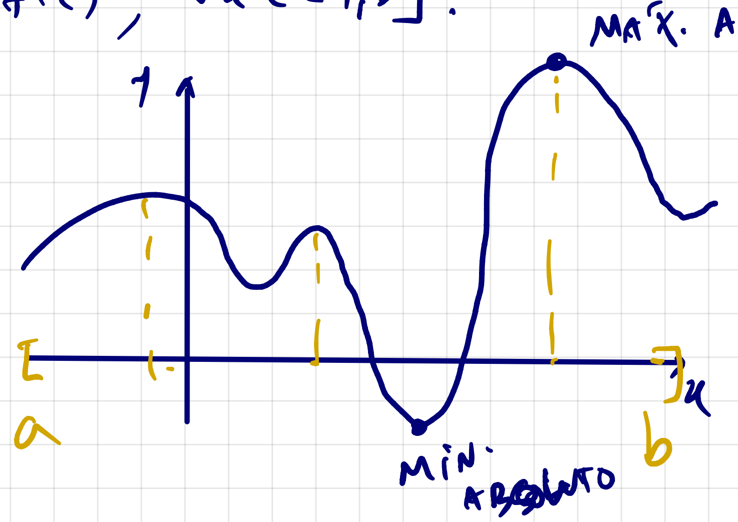
e $f'(-1) = 3 \cdot (-1+1)^2 = 0$

Porém, $x = -1$ não é extremo relativo.



, e obviamente $x=-1$ não é extremo relativo.

<u>Def.:</u> Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $c\in[a,b]$ é um ponto de MÁXIMO ABSOLUTO se $f(x)\le f(c)$, $\forall x\in[a,b]$.



Analogamente definimos ponto de MÍNIMO ABSOLUTO: ou seja, $c\in[a,b]$ é ponto de MÍN. ABSOLUTO se $f(x)\ge f(c)$, $\forall x\in[a,b]$

<u>Def.:</u> Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função derivável. Dizemos que $c\in[a,b]$ é um PONTO CRÍTICO de f se $f'(c)=0$ (i.e., se for um extremo relativo ou se $\nexists f'(c)$.

EXEMPLOS: Obter os pontos críticos das seguintes funções:

(a) $f(x) = (x-1) \cdot x^{\frac{1}{3}}$.

SOLUÇÃO: $f'(x) = ?$ $\quad f(x) = (x-1) \cdot x^{\frac{1}{3}} = u \cdot v$

$$f'(x) = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x-1 \Rightarrow u' = 1. \\ v = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow v' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 \\ \qquad = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x-1) \cdot \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{1}$$

$$= \frac{x-1 + 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x-1+3 \cdot x}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x-1}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

PONTOS CRÍTICOS:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-1}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

- $\nexists f'(x) \Leftrightarrow 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

PONTOS CRÍTICOS: $x = 0$ e $x = \frac{1}{4}$.

(b) $f(x) = \ln \sqrt{x-1}$.

$(\ln r)' = \frac{r'}{r}$

$f(x) = \ln (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln (x-1)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2(x-1)}$.

PONTOS CRÍTICOS:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ Absurdo

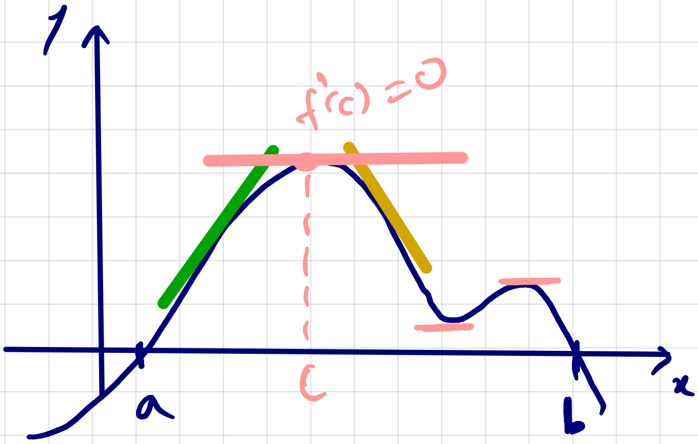
(i.e., não tem ponto crítico quando $f'(x) = 0$)

- $\nexists f'(x) \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

PONTO CRÍTICO de f: $x = 1$.

TEOREMA DE ROLLE: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f(a)=f(b)=0$, então, $\exists\, c$ entre a e b tal que $f'(c)=0$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA:

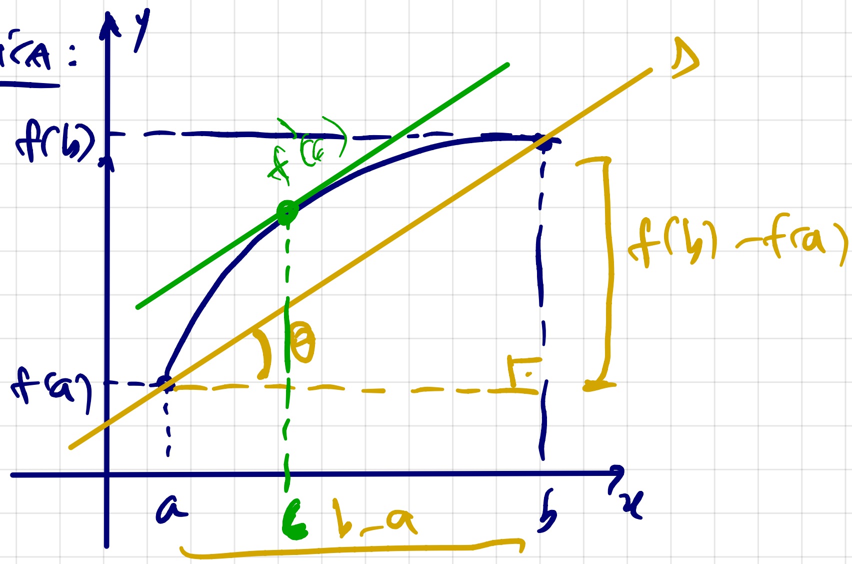


TEOREMA DO VALOR MÉDIO (T.V.M) ou TEOR. DE LAGRANGE:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então, $\exists\, c\in[a,b]$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA:



$$\tan\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \tan\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

OU SEJA, EXISTE UM PONTO $c \in [a,b]$ CUJA INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE f NAQUELE PONTO SERÁ À RETA SECANTE TRAÇADA. $\square$

Algumas consequências do T.V.M.

COROLÁRIO 1: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função derivável em (a,b). Se $f'(x)>0$, $\forall x \in (a,b)$, então f é uma função crescente.

DEMONSTRAÇÃO: Como f é derivável em (a,b) então ela é contínua. Sejam $x, y \in [a,b]$, com $x<y$.

e considere $f:[x,y]\to\mathbb{R}$. Como f é cont. e derivável, então, pelo T.V.M, segue que $\exists\, c$ entre x e y tal que

$$\underbrace{f'(c)}_{0<} = \frac{f(y)-f(x)}{\underbrace{y-x}_{>0}} \Longrightarrow f(y)-f(x)>0$$

POR HIPÓTESE.

$$\Longrightarrow f(y)>f(x)$$

$x \quad y$

ou seja, mostramos que, sendo $x<y$, temos $f(x)<f(y)$; e como x e y são quaisquer em $[a,b]$, segue que f é crescente.

$\square$

COROLÁRIO 2: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função derivável em (a,b). Se $f'(x)<0$, $\forall x\in(a,b)$, então f é uma função decrescente.

DEMONSTR.: Análoga à anterior.

$\square$

EX.: Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$; determine:

(a) os pontos críticos de f.

(b) os intervalos de crescimento e decrescimento.

SOLUÇÃO: Calculando $f'(x)$, vamos obter:

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 1=\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Assim:

- $f'(x)=0 \iff \dfrac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}=0 \iff 2=0$ (Absurdo)!

- $\nexists f'(x) \iff 3(x-1)^{\frac{1}{3}}=0 \iff x=1.$

O único ponto crítico é em $x = 1$.
isto responde o item (a).

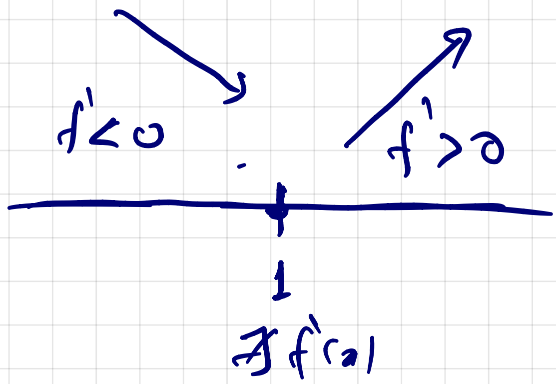
(b) Iremos estudar o sinal da derivada.

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x-1}}$$

este quociente se torna positivo ou negativo dependendo do sinal de $x-1$.

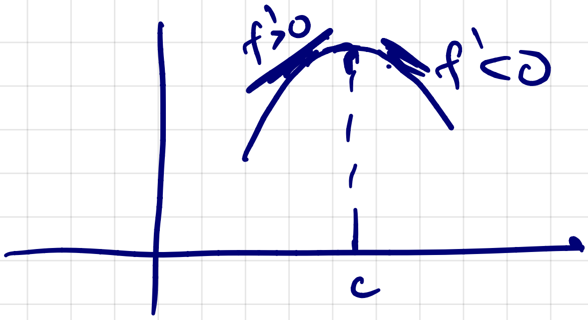
$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \begin{cases} < 0, & \text{se } x-1 < 0 \iff x < 1 \\ > 0, & \text{se } x-1 > 0 \iff x > 1. \end{cases}$$

Portanto:
f é decrescente em $(-\infty, 1)$ e crescente em $(1, +\infty)$



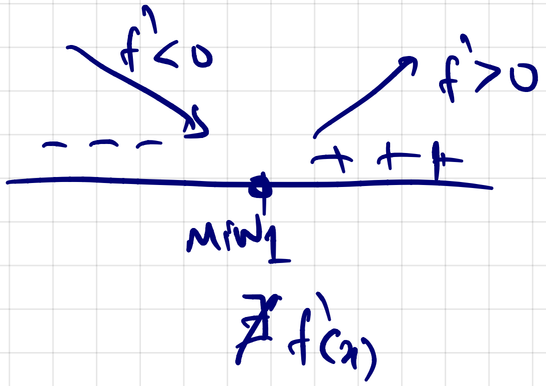
Frente ao que estudamos hoje, temos o seguinte conceito:

Defⁿ: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a,b), então um ponto crítico $c \in (a,b)$ será um ponto de MÁXIMO se $f'(x) > 0$, para $x < c$ e $f'(x) < 0$ para $x > c$.



E, o contrário, será um ponto de MÍNIMO.

No exemplo anterior, obtemos o seguinte estudo de sinal:



(estudo do sinal da derivada)

MÍN. $(1, f(1))$