CÁLCULO 1. 12/03/24 — AULA 25

AULA DE EXERCÍCIOS.

LISTA 07

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x|x-1|^{\frac{1}{3}}$.

(a) Mostre que f é contínua em $x = 1$.

(b) Verifique se f é derivável em $x = 1$.

(c) Calcular $f'(x)$.

(d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde $x = 2$.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = ?$

(i) $\exists f(1) = 1 \cdot |1-1|^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot 0 = 0$

(ii) $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe?

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = ?$

Note que

$f(x) = x \cdot |x-1|^{\frac{1}{3}}$; onde

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Dessa forma, teremos:

$$f(x) = x \cdot |x-1|^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} x \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}}, & \text{se } x \geq 1 \\ x \cdot (-x+1)^{\frac{1}{3}}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \cdot \sqrt[3]{x-1}, & \text{se } x \geq 1 \\ x \cdot \sqrt[3]{1-x}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Disso:

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x \cdot \sqrt[3]{\underbrace{1-x}_{0}} = 0$

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x \cdot \sqrt[3]{\underbrace{x-1}_{0}} = 0.$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 0$

Então, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$, logo, f é contínua no ponto $x = 1$.

(b) $f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} =$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt[3]{x-1} - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt[3]{x-1}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Leftrightarrow$$

obs: Lembre como racionalizar o denominador de $\sqrt[n]{a}$:

Ex.:

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2\cdot\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^3}}{(x-1)\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $f'_-(1) = +\infty$, já temos que f não é derivável em $x=1$.

(c) $f'(x) = ?$

Temos $f(x) = \begin{cases} x\cdot\sqrt[3]{x-1}, & \text{se } x \geq 1 \\ x\cdot\sqrt[3]{1-x}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

Como vimos no item anterior que $\nexists\, f'(1)$,

então $f'(x) = \begin{cases} \text{derivada da 1ª expressão, se } x > 1 \\ \text{derivada da 2ª expressão, se } x < 1. \end{cases}$

Ou seja;

$$f'(x) = \begin{cases} y_1' & , \text{se } x > 1 \\ y_2' & , \text{se } x < 1 \end{cases} \quad , \quad \text{onde}$$

$$\underbrace{y_1 = x \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}}}_{u \cdot v} \quad \text{e} \quad \underbrace{y_2 = x \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}}}_{u \cdot v}$$

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

PARA y_1':

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v = (x-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow v' = \frac{1}{3} \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}-1 = -\frac{2}{3}} \cdot 1 = \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

PARA y_2':

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v = (1-x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow v' = \frac{1}{3} \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}-1 = -\frac{2}{3}} \cdot (-1)$$

$$= -\frac{1}{3 \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow y_1' = x \, \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} + 1 \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{x}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} + (x-1)^{\frac{1}{3}} = \frac{x + 3 \cdot (x-1)^1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{x + 3x - 3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y_2' = x \cdot \left(-\frac{1}{3(1-x)^{2/3}} \right) + 1 \cdot (1-x)^{1/3} =$$

$$= -\frac{x}{3(1-x)^{2/3}} + (1-x)^{1/3} = \frac{-x + 3 \cdot (1-x)^1}{3(1-x)^{2/3}}$$

$$= \frac{-x + 3 - 3x}{3(1-x)^{2/3}} = \frac{3-4x}{3(1-x)^{2/3}}$$

Portanto, temos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-3}{3(x-1)^{2/3}}, & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{3-4x}{3(1-x)^{2/3}}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

(d) $x = 2$. eq. da reta tangente

$$P(2, f(2)) = (2, 2 \cdot |2-1|^{1/3}) = (2, 2)$$

$$y - y_p = m \cdot (x - x_p) \qquad \begin{cases} x_p = 2 \\ y_p = 2 \end{cases}$$

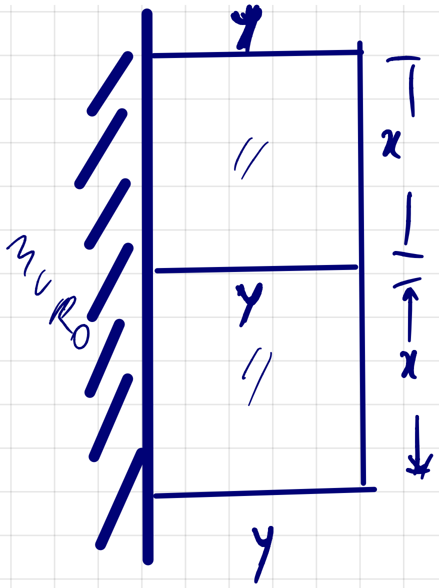
$$m = f'(2) = \frac{4 \cdot (2) - 3}{3(2-1)^{2/3}} = \frac{5}{3 \cdot 1} = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{y - 2 = \frac{5}{3}(x-2)}$$

eq. da reta tangente ao gráfico de f em $x=2$.

LISTA 10

9. Um fazendeiro dispõe de 600 m de material para cercar um pasto retangular adjacente a um muro já existente. Ele planeja construir uma cerca paralela ao muro, duas cercas formando as extremidades laterais e uma quarta cerca (paralela às duas últimas) para dividir o cercado em duas partes iguais. Qual é a área máxima que pode ser cercada?



Achar a área máxima que pode ser cercada.

600 m de material.

$$2x + 3y = 600 \quad \rightarrow \quad x = \frac{600 - 3y}{2}$$

$$A = 2 \cdot xy$$

$$A = \cancel{2} \cdot \left(\frac{600 - 3y}{\cancel{2}}\right) \cdot y$$

$$A = 600y - 3y^2$$

PONTOS CRÍTICOS: $A'(y) = 0$ ou $\cancel{\nexists A'(y)}$

DESCARTAMOS POIS $A(y)$ É POLINÔMIO

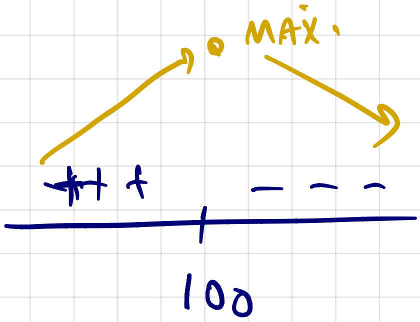
$$A'(y) = 600 - 6y$$

$$A'(y) = 0 \iff 600 - 6y = 0$$

$$\iff 6y = 600$$

$$\iff \boxed{y = 100 \text{ m}}$$

SINAL DA DERIVADA:



$$\begin{cases} y = 0 \,;\; A'(y) = 600 > 0 \\ y = 1000 \,;\; A'(y) = 600 - 6000 < 0 \end{cases}$$

Logo, a área será máxima quando $y = 100\,m$. Neste caso, teremos

$$x = \frac{600 - 3.(100)}{2} = \underline{150\,m}$$

Assim, a área máxima que pode ser cercada será:

$$A = 2xy = 2.150.100 = 300.100$$

$$= 30.000\,m^2.$$

L10

21. Faça um estudo completo de cada função abaixo, determinando domínio, zeros, assíntotas (se existirem), pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos, concavidades e pontos de inflexão.

$$\text{(g)}\ f(x) = (1-x)x^{\frac{1}{5}}$$

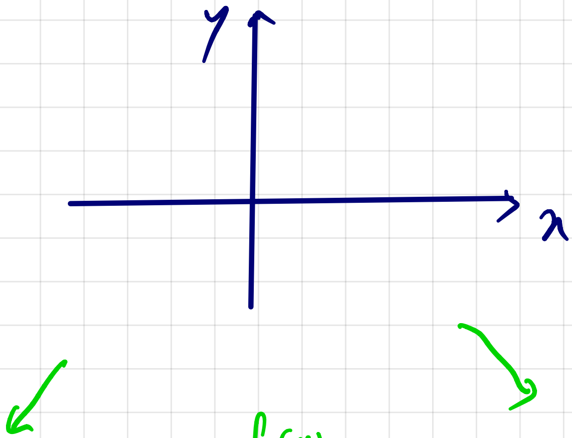
zeros: $f(x) = 0 \iff (1-x)\cdot x^{\frac{1}{5}} = 0 \iff x = 1,\ x = 0$

$D(f) = \mathbb{R}$ → logo, não vai possuir assíntota vertical.

ASSÍNTOTA HORIZONTAL:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\cdot\sqrt[5]{x} = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)\cdot\sqrt[5]{x} = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$



$f(x) \to -\infty$
$x \to \pm\infty$

Derivando $f(x) = (1-x)\,x^{\frac{1}{5}}$, para achar pontos críticos, MÁX./MÍN, cresc./decresc.

$$f(x) = (1-x) \cdot x^{\frac{1}{5}} = u \cdot v$$

$$\begin{cases} u = 1-x \Rightarrow u' = -1 \\ v = x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow v' = \frac{1}{5} \cdot x^{\frac{1}{5}-1} \cdot 1 = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = u \cdot v' + u' v$$

$$f'(x) = (1-x) \cdot \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} + (-1) \cdot x^{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1-x + (-1) \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot 5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1-x-5x}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1-6x}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1-6x}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}}$$

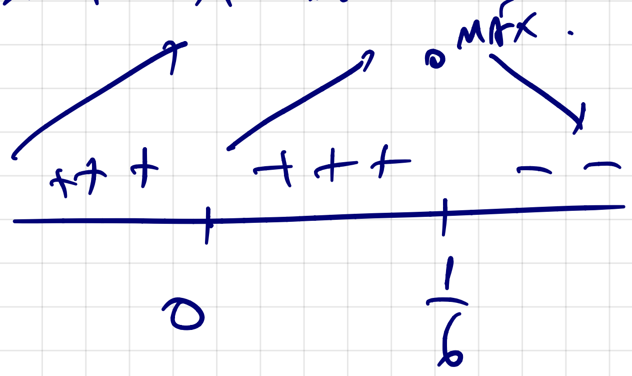
PONTOS CRÍTICOS: $f'(x) = 0$ e $\nexists f'(x)$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-6x}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}} = 0 \Leftrightarrow 1-6x = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{6}}$

• $\nexists f'(x) \iff x = 0$ (daria divisão por zero)

SINAL DA DERIVADA:



$$\begin{cases} x = -1 : f'(x) = \dfrac{1-6\cdot(-1)}{5\cdot(-1)^{\frac{4}{5}}} > 0 \\ x = \dfrac{1}{10} ; f'(x) = \dfrac{1-6\cdot\frac{1}{10}}{5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{4}{5}}} > 0 \\ x = 1 ; f'(x) = \dfrac{1-6(1)}{5\cdot(1)^{\frac{4}{5}}} < 0 \end{cases}$$

Então:

• f é crescente em $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$

• f é decrescente em $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$

$\exists$ máx. $\left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right)$

CONCAVIDADE E PONTO DE INFLEXÃO: deve-se estudar o sinal da derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{1-6x}{5\cdot x^{\frac{4}{5}}} = \frac{u}{v}$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2},$$

onde:

$$u = 1-6x \Rightarrow u' = -6$$

$$v = 5\cdot x^{\frac{4}{5}} \Rightarrow v' = \cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}\cdot x^{\frac{4}{5}-1}\cdot 1$$

$$= 4\cdot x^{-\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{5\cdot x^{\frac{4}{5}}\cdot(-6) - (1-6x)\cdot 4\cdot x^{-\frac{1}{5}}}{\left(5\cdot x^{\frac{4}{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{-30\, x^{\frac{4}{5}} - 4(1-6x)\cdot x^{-\frac{1}{5}}}{25\cdot x^{\frac{8}{5}}}$$

$$= \frac{-30\, x^{\frac{4}{5}} - \frac{4(1-6x)}{x^{1/5}}}{25\, x^{8/5}} = \frac{\frac{-30\cdot x^{1} - 4 + 24x}{x^{1/5}}}{25\, x^{8/5}} =$$

$$= \frac{-6x-4}{x^{1/5}} \times \frac{1}{25\, x^{\frac{8}{5}}} = \frac{-6x-4}{25\, x^{\frac{9}{5}}}$$

Assim:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-4}{25\, x^{\frac{9}{5}}} = 0 \Leftrightarrow -6x-4=0$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

SINAL DA DERIVADA SEGUNDA:

C.P.B   C.P.B

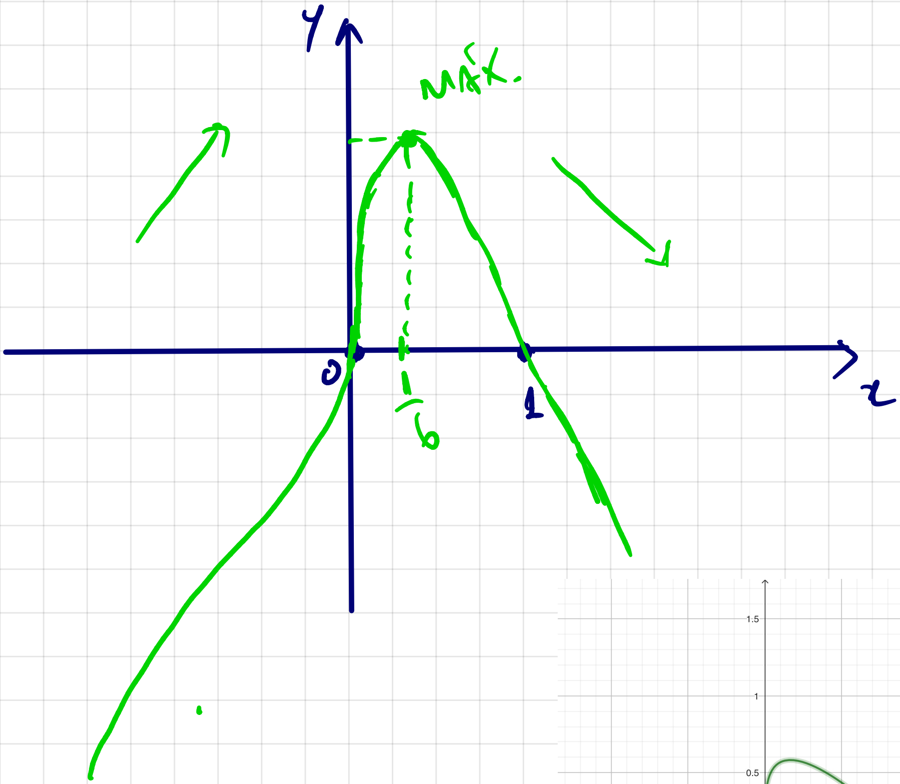
$- - - \quad\quad - - -$

$-\frac{2}{3}$

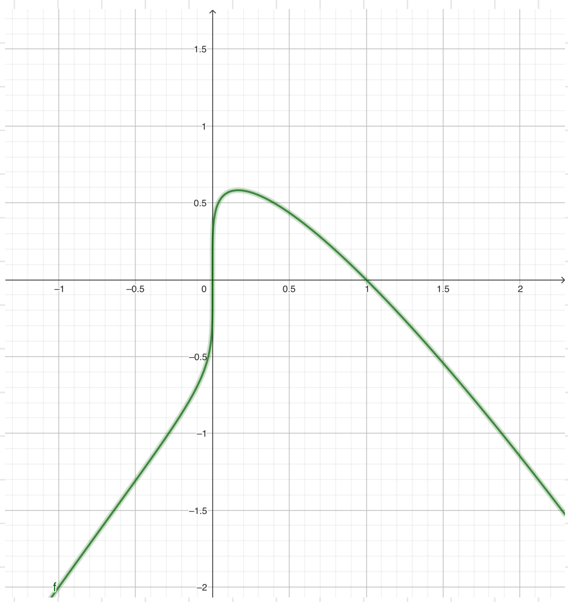
$$\begin{cases} x=-1 ; f''(x) = \dfrac{-6(-1)-4}{25(-1)^{\frac{9}{5}}} < 0 \\ x = 1 ; f'' = \dfrac{-6.(1)-4}{25.(1)^{\frac{9}{5}}} < 0 \end{cases}$$

C.P.B, $\forall x \in \mathbb{R}$. não tem P.I.

Esboço gráfico de $y = (1-x) \cdot x^{\frac{1}{5}}$.

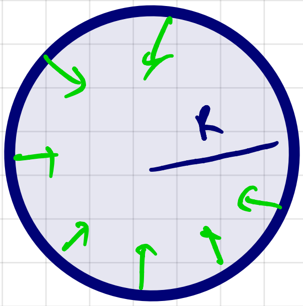


GEOGEBRA.



LISTA 11

4. Uma queimadura na pele de uma pessoa te a forma de um círculo, tal que se r cm for o raio e A cm^2 for a ára da queimadura, então $A = \pi r^2$. Use diferencial para encontrar o decréscimo aproximadoda área da quimadura quando o raio passa de 1 para 0,8 cm.



$$A = \pi R^2$$

$R = 1$ cm.

$$R + \Delta R = 0{,}8$$

$$\Delta R = -0{,}2$$

APROXIMAÇÃO DIFERENCIAL.

$$A(R+\Delta R) \approx A(R) + A'(R)\cdot\Delta R$$

$$A(R) = \pi R^2 \quad ; \quad A'(R) = 2\pi R$$

$$A(\underbrace{R+\Delta R}_{0{,}8}) \approx \pi \underbrace{R}_{=1}^2 + 2\pi \underbrace{R}_{1} \cdot \underbrace{\Delta R}_{-0{,}2}$$

$$A(0{,}8) \approx \pi\cdot(1)^2 + 2\pi\cdot 1\cdot(-0{,}2) = \pi - 0{,}4\pi$$

$$A(0{,}8) \approx \underline{\underline{0{,}6\pi \ m^2}}$$