Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turma T2
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios - Aplicações da integral definida: áreas e volumes

1. Encontre a área da região R formada pelo gráfico de $f(x) = x^2 - x$ no intervalo $[-2, 4]$.

2. Calcule a área acima do eixo x limitada por $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ e $x = b$, onde b é algum número maior do que 1. O resultado dependerá do valor de b. O que acontece com essa área quando $b \to +\infty$?

3. Esboçar a região entre as curvas e ache as áreas compreendidas:

   (a) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$.
   (b) $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.
   (c) $x = \operatorname{sen} y$, $x = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{3\pi}{4}$.
   (d) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = \ln 2$.

4. Calcule a área formada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

5. Obtenha a área da região limitada pelo gráfico de $y = x^2$ e a reta $y = 2$.

6. Obtenha a área da região formada por $y = \sin x$, $y = -\cos x$ e as retas $x = 0$ e $x = \pi$.

7. Ache a área da região no primeiro quadrante limitada pelo e ixo y e pelas curvas $y = \sec^2 x$ e $y = 2\tan^2 x$.

8. Calcule a área da região formada por $x = 9 - y^2$ e $x = 5$ de duas maneiras: como uma integral ao longo do eixo y e como uma integral ao longo do eixo x.

9. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x$ e $y = 8 - 3x^2$.

10. Obtenha a área da região limitada pelas curvas $y = \dfrac{8}{x^2}$, $y = 8x$ e $y = x$.

11. Calcule a área entre $y = x^3$ e sua tangente em $x = 1$.

12. Mostre que o volume de um cone reto de altura h e raio da base R é dado por $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

13. A região limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Determine o volume do sólido gerado.

14. Obtenha o volume do sólido S obtido ao se girar a região limitada por $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{2x}$ e $y = 0$ em torno do eixo x.

15. Ache o volume do sólido que resulta quando a região limitada por $x = y^2$ e $x = y$ é feita girar em torno da reta $y = -1$.

16. Seja a região Ω limitada pelas curvas $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$. Determine o volume do sólido gerado ao se girar a região Ω:

    (a) em torno do eixo x;
    (b) em torno do eixo y;
    (c) em torno da reta $x = 2$;
    (d) em torno da reta $y = 2$.

17. Seja Ω a região do primeiro quadrante acima de $y = x^2$ e abaixo de $y = 2 - x^2$. Determine o volume do sólido S obtido ao se girar esta região em torno do eixo y. (Resp. π u.v.)

18. Utilize o método do invólucro cilíndrico para determinar o volume do sólido determinado ao se girar a região formada pelas curvas abaixo, em torno do eixo indicado.

(a) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$ e $y = 0$; em torno do eixo y.

(b) $x^2 = 4y$, $y = 4$; em torno do eixo x.

(c) $y = x^3$, $x = 3$, $y = 0$; em torno do eixo y.

19. Em cada item a seguir, achar o volume do sólido S obtido ao se girar a curva $y = f(x)$, em torno do eico x, no intervalo $[a, b]$ dado.

    (a) $f(x) = \cos x$, $[-1, 1]$.

    (b) $f(x) = \sec x$, $[0, \frac{\pi}{4}]$.

    (c) $f(x) = \ln x$, $[1, 2]$.

    (d) $\sqrt{\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}$, $[e, e^2]$.

20. Considere a região Ω formada pelas curvas $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$.Ache o volume do sólido obtido quando esta região Ω girar em torno:
    (a) do eixo OX.
    (b) do eixo OY.

21. Obtenha o volume do sólido obtido ao se girar a região R limitada pelas curvas $y = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x = 0$, $x = 7$ e $y = 0$ em torno do eixo Ox. (Resp.: $\frac{3\pi}{5}(8^{\frac{5}{3}} - 2^{\frac{5}{3}})$ u.v.)

22. Ache o volume do sólido S gerado pela rotação em torno do eixo y, da região limitada por $y = |x - 3|$ e pelas retas $x = 1$, $x = 5$ e $y = 0$. Tome os retangulos elementares paralelos ao eixo de revolução.

23. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -3$, da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 1 + x - x^2$. (Resp.: $\frac{231}{62}\pi$ u.v.)

24. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada por aquela reta e pela parábola $x = 4 + 6y + 2y^2$. (Resp.: $\frac{1250}{3}\pi$ u.v.)

25. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região fora da curva $y = x^2$ e entre as retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$ em torno do eixo y.

26. Use o método do invólucro cilÃndrico para determinar o volume do sólido gerado quando a região determinada pelas curvas abaixo girar em torno do eixo y.

    (a) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

    (b) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $x = 9$, $y = 0$.

    (c) $y = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $x = 2$.

    (d) $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

27. Ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$ em torno do eixo Ox. Tome os elementos retangulares de área paralelos ao eixo de revolução.