Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turma T2
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 de Exercícios - integrais impróprias

1. Calcule cada integral definida a seguir, se existir

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ (e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\, dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$

   (g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}$ (i) $\displaystyle\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

2. Seja p uma constante positiva. Determine o valor de p para que a integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

   seja convergente.

3. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$, se esta integral existir.

4. **A Função Gamma.** Definimos, para cada[1] $n \in \mathbb{N}$, a função

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$$

   Tal função é chamada de *função Gamma*.

   (a) Usando integração por partes e a regra de L'Hospital, mostre que

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1).$$

   (b) Mostre, em particular, que $\Gamma(1) = 1$. Conclua que $\Gamma(n) = (n-1)!$, onde "!" expressa o *fatorial* de n.

5. Calcule a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$, se existir.

[1] De fato, esta função também fica bem definida se n for racional ou inteiro negativo. Assim, a função Gamma generaliza a noção de fatorial de um número inteiro para um número racional e para um número negativo!