Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - Significado físico da derivada; derivadas laterais; regras de derivação

1. **Definição.** Chama-se *reta normal* ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ a reta perpendicular à reta tangente a f em P, passando por este ponto.

   Por exemplo, sabemos que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 0$ é o eixo horizontal ox, e então a reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no mesmo ponto $x_0 = 0$ será o eixo vertical oy.

   Com base na definição acima, determine em cada item abaixo a equação das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto indicado.

   (a) $f(x) = (2x^2 - 3x)^3$, em $x = 2$. (b) $f(x) = \ln(2x - 1)$, em $x = 1$.
   (c) $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x + 2}$, em $x = 1$. (d) $f(x) = \operatorname{sen}((3x-1)\pi) + \sqrt{x+1}$, em $x = 3$.

2. Suponha que um corredor em uma corrida de 100 metros está a s metros da linha de chegada t segundos depois do início da corrida, onde

$$s = 100 - \frac{1}{4}(t^2 + 33t).$$

   Determine a velocidade do corredor:

   (a) no início da corrida;
   (b) quando o corredor cruza a linha de chegada.

3. Uma jamanta pega uma pista de saída de uma rodovia em $t = 0$. Sua posição depois de t segundos é dada por $s(t) = 84t - t^3$ metros, para $0 \leq t \leq 5$.

   (a) Qual é a velocidade da jamanta no momento em que pega a pista de saída?
   (b) Qual a sua aceleração em $t = 4s$?

4. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s(t) = 5 - \cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

5. Uma partícula move-se ao longo de uma reta obedecendo à lei

$$s(t) = \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{3}) + \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{6}),$$

   onde s é expresso em metros e t em segundos. Qual a aceleração da partícula no instante de tempo $t = 4$ segundos?

6. A lei do movimento de um objeto é dada por $s(t) = t - \ln(t^2 + 1)$, onde s é dado em metros e t em segundos. Determine a aceleração do objeto no instante em que o mesmo entrar em repouso.

7. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Calcule as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$. O que concluímos sobre a existência de $f'(0)$? O que isso significa geometricamente?

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x|x-1|^{\frac{1}{3}}$.

   (a) Mostre que f é contínua em $x = 1$.

   (b) Verifique se f é derivável em $x = 1$.

   (c) Calcular $f'(x)$.

   (d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde $x = 2$.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x+1)|x+1|.$$

   (a) Essa função é derivável em todos os pontos?

   (b) Calcule $f'(x)$ e faça um esboço gráfico da função derivada.

10. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo aberto I. Se, para cada $x \in I$, existir $f'_+(x)$ e for $f'_+(x) > 0$, então f é crescente.

11. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{ se } \ x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \ x = 0 \end{cases}$$

e derivável com derivada primeira contínua.

12. Verifique se a função $f(x) = x|1-x^2|$ é derivável no ponto $x = 1$.

13. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$ (b) $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x}$

   (c) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$ (d) $y = (2x-1)(x^2 - 6x + 3)$

   (e) $y = \dfrac{1}{2}\tan^2 x$ (f) $y = \ln\cos(x)$

   (g) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$ (h) $y = e^{x\cos x}$

14. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $f(x) = (3x^2 - 5x^3)^2$ (b) $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x^2 - x + 1}$

   (c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$ (d) $f(x) = \ln(4x^3 - 2x^2)$

   (e) $f(x) = (1 - 2x^2 - x^3)\cdot\ln(x^3 - x - 1)$ (f) $f(x) = \ln\dfrac{3-2x}{x+1}$

   (g) $f(x) = e^{3x^2-1}$ (h) $f(x) = e^{2x}\cdot\ln(2-3x)$

   (i) $f(x) = \operatorname{sen}(3x-2)\cdot\ln(x-1)$ (j) $f(x) = \tan(\ln(1-2x)) + \sqrt{x}$

   (k) $f(x) = \sec\left(\ln\left(\dfrac{1-2x}{3x+1}\right)\right)$ (ℓ) $f(x) = \tan\left(\cos\left(\ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)\right)\right)$