Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Derivadas (primeiros resultados)

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^2$. Determine $f'(a)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

2. Em cada item a seguir, usando a definição de derivada, obtenha a função derivada f' e obtenha a equação da reta tangente no ponto x_0 indicado.

   (a) $f(x) = x^2 - 3x - 1$; $x_0 = 2$.
   (b) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$; $x_0 = 1$.
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 4$
   (d) $f(x) = \ln(1 - x)$; $x_0 = 0$.

3. Calcule a derivada de cada função abaixo, usando a definição de derivada:

   (a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
   (b) $f(x) = \sqrt{3 - 4x}$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 3)$
   (d) $f(x) = \ln(3 - 2x)$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$
   (f) $f(x) = \ln \dfrac{2}{x - 1}$

4. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

5. Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in I$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se num ponto[1] $a \in I \cap I'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existirem $f'(a) = h'(a)$, mostre que existe $g'(a)$ e tem o mesmo valor.
   Obs. Podemos dizer que este resultado é o "Teorema do sanduíche para derivadas".

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in I \cap I'$, defina $\xi : I \to \mathbb{R}$ pondo

$$\xi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se } \ x \neq a \\ L & \text{se } \ x = a \end{cases}.$$

   Prove que ξ é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

7. Seja f a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } \ x \neq 0 \\ 0, & \text{se } \ x = 0 \end{cases}$$

   Use a definição de derivada para mostrar que existe $f'(0)$, mas que $f'(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$. (ou seja, a função derivada f' não é contínua em $x = 0$).

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } \ x \text{ racional} \\ 0, & \text{se } \ x \text{ irracional} \end{cases}.$$

   Prove que f é derivável em $x = 0$.

---

[1] Dizer que $a \in I \cap I'$ significa que a é um ponto do intervalo I que é também um ponto de acumulação de I.