Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Química e Computação
Segunda Prova de Cálculo 1
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 08/02/2024

Questão 01. [1,5 pt] Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 1 - 2\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

indicando domínio, imagem e período. O que se pode dizer sobre $\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} f(x)$? Justifique.

Questão 02. [1,5 pt] Usando limites laterais e limites no infinito, esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x+1}{1-3x},$$

indicando zeros (se existirem), domínio e imagem.

Questão 03. Calcule os seguintes limites: [0,5 pt cada]

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x-2}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+3x}-2}{x^2-1}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{3x - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+2}}$

Questão 04. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right) - 1.$$

(a) [0,5 pt] Determine o domínio de f.

(b) [0,5 pt] Sabendo que as funções $u(x) = x$, $v(x) = \frac{1}{x}$ e $w(x) = \ln x$ são contínuas em seus domínios, justifique que f é contínua em seu domínio.

(c) [0,5 pt] Usando o item (b), mostre que f possui uma raiz real entre 5 e 6 (sem determiná-la).

(d) [1,0 pt] Calcule $\lim_{x\to -\infty} (x+2)(f(x)+1)$.

Questão 05. [1,0 pt] Verifique se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}, & \text{se } x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$.

Questão 06. [1,5 pt] Usando a definição de derivada, calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Em seguida, obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$.

GABARITO.

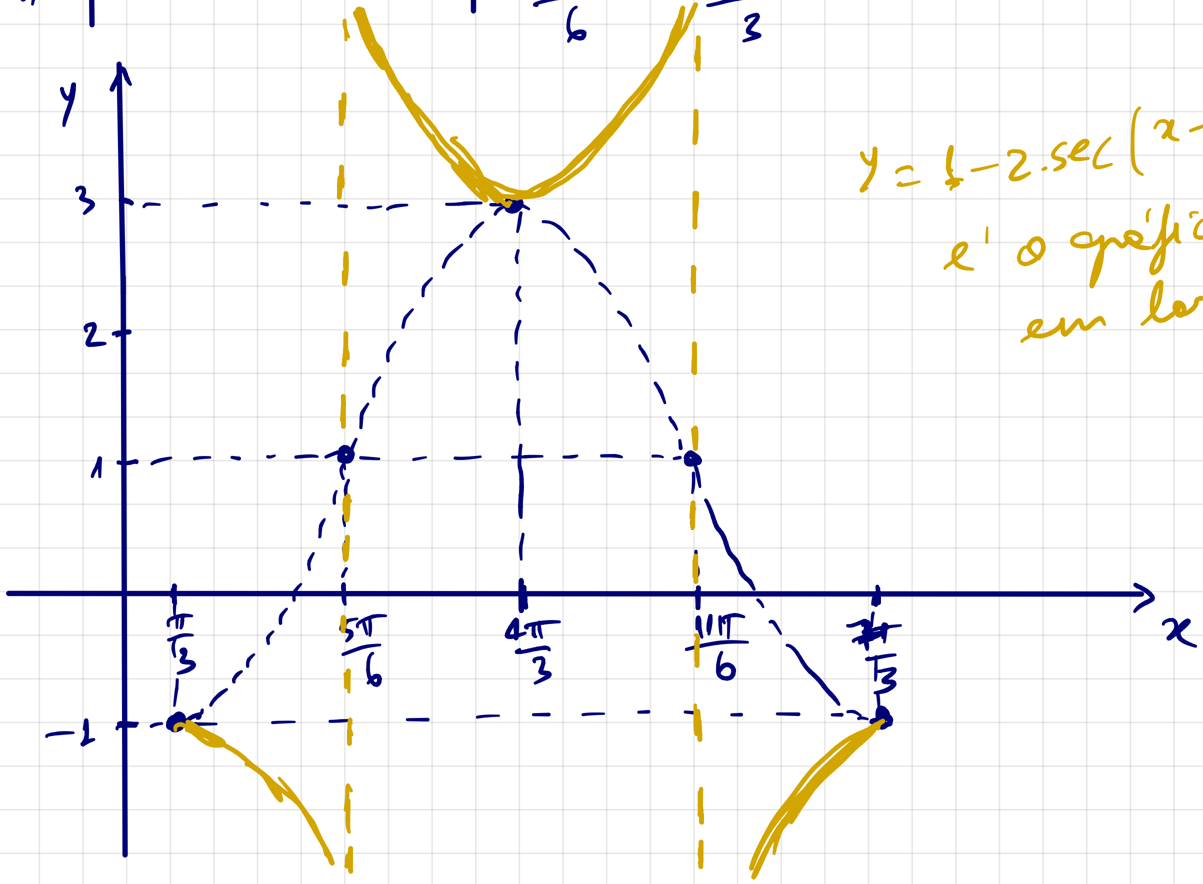
01) $y = 1 - 2.\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

1º: considere $y = 1 - 2.\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Escreva $x - \frac{\pi}{3} = t \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow y = 1 - 2.\cos t$

t	$y = 1 - 2\cos t$	$x = t + \frac{\pi}{3}$
0	$1 - 2\cos 0 = -1$	$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 2\cos\frac{\pi}{2} = 1$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$
π	$1 - 2\cos\pi = 3$	$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 - 2.\cos\frac{3\pi}{2} = 1$	$\frac{11\pi}{6}$
2π	$1 - 2\cos 2\pi = -1$	$\frac{14\pi}{6} = \frac{7\pi}{3}$



$y = 1 - 2.\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ é o gráfico em laranja

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{5\pi}{6}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

$P = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$

$\lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} f(x) = ?$ Como $\lim_{x \to \frac{5\pi}{6}^-} f(x) = -\infty$ e

$\lim_{x \to \frac{5\pi}{6}^+} f(x) = +\infty$, segue que $\nexists \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} f(x)$.

---

02) $f(x) = \frac{x+1}{1-3x}$ zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-3x} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -1}$

$D(f) = ?$

$1 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.

Então, $x = \frac{1}{3}$ é uma assíntota vertical.

Dado $\delta > 0$.

Escreva $x = \frac{1}{3} - \delta$. Então, $x \to \frac{1}{3} \Leftrightarrow \delta \to 0^+$

Assim:

- $\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{1}{3} - \delta + 1}{1 - 3.\left(\frac{1}{3} - \delta\right)} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{4}{3} - \delta}{\cancel{1} - \cancel{1} + 3\delta}$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{4}{3} - \delta}{3\delta} = +\infty.$$

Escreva $x = \frac{1}{3} + \delta$. Então, $x \to \frac{1}{3}^+ \iff \delta \to 0^+$.

Assim:

- $$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{1}{3} + \delta + 1}{1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \delta\right)} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{4}{3} + \delta}{\cancel{1} - \cancel{1} - 3\delta} =$$

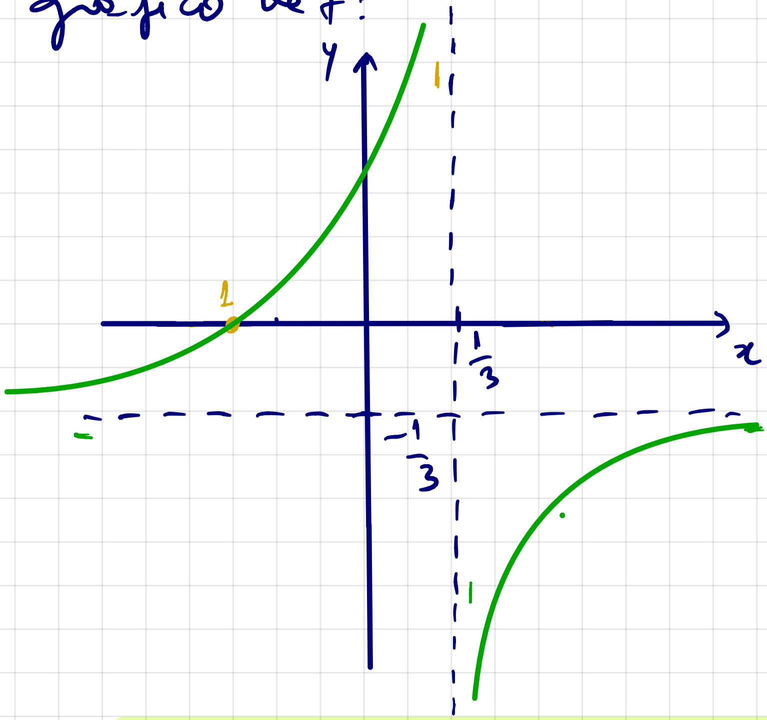
$$= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{4}{3} + \delta}{-3\delta} = -\infty.$$

Além disso:

- $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 1}{1 - 3x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{-3x} = -\frac{1}{3}$$

Logo, $y = -\frac{1}{3}$ é uma assíntota horizontal.

Esboço gráfico de f:



$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}.$

03) (a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+x+1)} \stackrel{(*)}{=}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3x + 2 & x - 2 \\ \hline -x^2 + 2x & x - 1 \\ \hline -x + 2 & \\ +x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - x - 2 & x - 2 \\ \hline -x^3 + 2x^2 & x^2 + x + 1 \\ \hline x^2 - x - 2 & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline x - 2 & \\ -x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \to 2} \dfrac{x-1}{x^2+x+1} = \dfrac{2-1}{(2)^2+2+1} = \dfrac{1}{7}$

(b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x} - 2}{x^2 - 1} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x} - 2}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{1+3x} + 2}{\sqrt{1+3x} + 2} =$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{1 + 3x - 4}{(x+1)(x-1)(\sqrt{1+3x}+2)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{3\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}(\sqrt{1+3x}+2)}$

$= \dfrac{3}{(1+1)(\sqrt{1+3}+2)} = \dfrac{3}{2 \cdot 4} = \dfrac{3}{8}$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} - 2\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{3 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} + 7\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}} = \dfrac{3-2}{3+7} = \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \to 1$, $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 1$, $\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x} \to 1$

$$(d)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+2}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-1}-1\right)^{\frac{3x^2-1}{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{x^2}-4x+3-\cancel{x^2}-x+1}{x^2+x-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+2}} =$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-5x+4}{x^2+x-1}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-5x+4}}}_{\to e}\right]^{\frac{-5x+4}{x^2+x-1}\cdot\frac{3x^2-1}{x+2}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-15\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}} = e^{-15}$$

---

04) Primeiramente, usando de propriedades dos logaritmos, temos.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right)-1 = \ln(x-1)-\ln(x-4)-1.$$

(a) $D(f) = ?$

$$\begin{cases} x-1>0 \iff x>1 \\ x-4>0 \iff x>4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(f) = (4,+\infty)$$

(b) Como $u(x) = x$; $v(x) = \frac{1}{x}$; $w(x) = \ln x$ são contínuas em seus domínios, então,

$$h(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad l(x) = x - 4 \text{ também o são.}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x-1) - \ln(x-4) - 1 \\ &= \ln h(x) - \ln l(x) - 1 = \\ &= w(h(x)) - w(l(x)) - 1 \quad \text{é contínua,} \end{aligned}$$

pois é uma soma (diferença) de composições de funções contínuas.

(c) Pelo item (b) temos que f é contínua (no seu domínio). Como

- $f(5) = \ln(5-1) - \ln(5-4) - 1$
  $= \ln 4 - \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1 = \ln 4 - 1 \approx 0{,}386$

- $f(6) = \ln(6-1) - \ln(6-4) - 1$
  $= \ln 5 - \ln 2 - 1 = \ln \frac{5}{2} - 1 \approx -0{,}08$;

então

$$f(6) < 0 < f(5),$$ segue pelo

T.V.I. que $\exists\ c$ entre 5 e 6 tal que $f(c) = 0$, ou seja, f possui um zero entre 5 e 6.

(d) $\lim_{x\to-\infty}(x+2)\cdot\left(f(x)+1\right) = \lim_{x\to-\infty}(x+2)\cdot\left(\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right)\cancel{-1}\cancel{+1}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}(x+2)\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right) = \ln\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x-4}\right)^{x+2} =$$

$$= \ln\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x-1}{x-4}-1\right)^{x+2} =$$

$$= \ln\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}+4}{x-4}\right)^{x+2} = \ln\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x-4}\right)^{x+2} =$$

$$= \ln\left[\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{3}}}_{\to e}\right]^{\frac{3}{x-4}\cdot(x+2)} =$$

$$= \ln e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+6}{x-4}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+6}{x-4}\cdot\underbrace{\ln e}_{=1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1} = 3$$

05) Vamos verificar se $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

(i) $\exists f(1) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$

(ii) $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$?

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)} \cdot (x+2)}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x+2 \\ \hline 2x-2 & \\ -2x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$

Logo, $\exists \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{2}{3}$

(iii) $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{2}{3} = f(1)$.

Logo, f é contínua em $x = 1$.

06) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 \cdot x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2hx - h^2}{(x+h)^2 \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-2x - h)}{\cancel{h}(x+h)^2 \cdot x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2 \cdot x^2}$$

$$= \frac{-2\cancel{x}}{x^2 \cdot \cancel{x^2}} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{2}{x^3}}$$

Resta obter a eq. da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_0, f(x_0))$, onde $x_0 = 1$.

$P(1, f(1))$; $f(1) = \frac{1}{(1)^2} = 1$.

$\Rightarrow y - y_p = m \cdot (x - x_p)$; $m = f'(1) = -\frac{2}{(1)^3} = -2$

$\Rightarrow y - 1 = -2(x - 1)$

$\Rightarrow y = -2x + 2 + 1$

$\boxed{y = -2x + 3}$ eq. da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 1$.