Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Química e Computação
Segunda Prova de Cálculo 2
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 08/02/2024

Questão 01. Calcule cada integral indefinida a seguir.

(a) $\int x^2 \cos x dx$ (b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$ (c) $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x - \cos x + 3}$

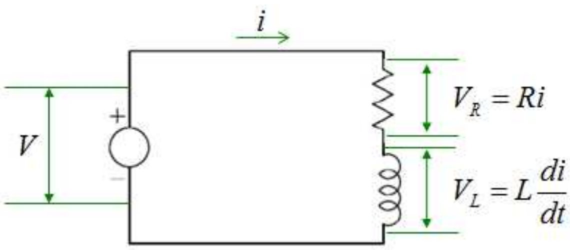
(d) $\int \frac{(2x^2+18)dx}{(x+3)(x^2+9)}$ (e) $\int \cos^5(2x-1)dx$ (f) $\int \frac{(2-3x)dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

Questão 02. Mostre que

$$\int_2^4 \frac{x^2-2}{x^3-x^2}dx = \frac{1}{2} + \ln\frac{4}{3}.$$

Questão 03. Numa certa região bárbara, duas tribos vizinhas têm-se odiado desde os tempos primitivos. Sendo povos bárbaros, seus poderes de crença são fortes e uma solene praga rogada pelo curandeiro da primeira tribo enlouquece os membros da segunda tribo conduzindo-os ao assassíno e suicídio. Se a taxa de variação da população P da segunda tribo é $-\sqrt{P}$ pessoas por semana e se a população é de 676 quando a praga é rogada, quando eles estarão todos mortos?

Questão 04. Considere o circuito RL-série conforme o esquema abaixo, formado por um indutor de indutância L Henrys, um resistor de resistência R Ohms e uma fonte de tensão V volts.



Se i for a corrente elétrica no circuito, a queda de tensão sobre o resistor R é dada por $V_R = R \cdot i$, já a queda de tensão sobre o indutor L será $V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Então, pela lei das tensões de Kirchoff tem-se que

$$V = V_R + V_L.$$

(a) Sabendo que quando $t = 0$ tem-se $i = 0$, mostre que a corrente elétrica $i = i(t)$ é dada por

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

(b) Se $R = 10\Omega$, $L = 3H$ e $V = 50$ volts, determine a corrente elétrica $i = i(t)$ em função do tempo.

QUESTÃO 01.

(a) $\int x^2 \cos x\,dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$; onde:

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Assim:

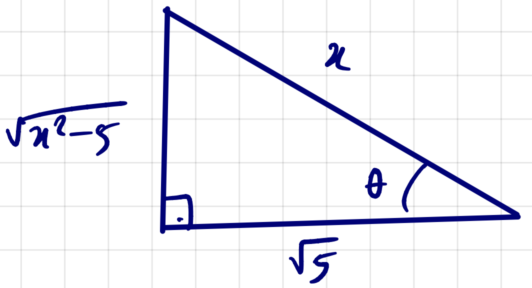
$$\int x^2 \cdot \cos x\,dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x - \underbrace{\int \operatorname{sen} x \cdot 2x\,dx}_{\text{INTEGRAR POR PARTES NOVAMENTE.}} =$$

$$\begin{cases} u = 2x \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x. \end{cases}$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{sen} x - \left[2x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2\,dx \right] =$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \int \cos x\,dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \cdot \operatorname{sen} x + C$$

(b) $\int \dfrac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-5}}$.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\cos x} = \sqrt{5} \cdot \sec\theta$$

$$\Rightarrow dx = \sqrt{5} \cdot \sec\theta \cdot \tan\theta\,d\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{x^2-5} = \sqrt{5}\tan\theta$$

Disso, teremos:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\cancel{\sqrt{5}} \cdot \sec\theta \cdot \cancel{\tan\theta} \cdot d\theta}{(\sqrt{5}\sec\theta)^2 \cdot \cancel{\sqrt{5} \cdot \tan\theta}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} =$$

$$\frac{1}{5}\int \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{5}\cdot \operatorname{sen}\theta + C = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-5}}{5x} + C.$$

(c) $$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}x - \cos x + 3} = ?$$

Escreva $z = \tan\frac{x}{2}$. Assim, pela troca universal, teremos $\operatorname{sen}x = \frac{2z}{1+z^2}$; $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$; $dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$.

Disso, obtemos:

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}x - \cos x + 3} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2\cdot\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2} + 3} =$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{\cancel{1+z^2}}}{\frac{4z - 1 + z^2 + 3 + 3z^2}{\cancel{1+z^2}}} = \int \frac{2dz}{4z^2+4z+2} = \int \frac{dz}{2z^2+2z+1} =$$

$$2z^2+2z+1 = 2\cdot\left[(z+a)^2+b\right]$$

$$= 2z^2+4az+2a^2+2b$$

$$\Rightarrow 2=4a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2a^2+2b=1 \\ 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b=1 \\ \frac{1}{2}+2b=1 \\ \Rightarrow b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo, $2z^2+2z+1 = 2\cdot\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$

Assim, obtemos:

$$\circledcirc = \int \frac{dz}{2\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}}\cdot\arctan\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)+C = \arctan(2z+1)+C.$$

Como $z=\tan\frac{x}{2}$, obtemos, por fim:

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}x-\cos x+3} = \arctan(2z+1)+C$$

$$= \arctan\left(2\cdot\tan\frac{x}{2}+1\right)+C$$

(d) $\displaystyle\int \frac{(2x^2+18)\,dx}{(x+3)\cdot(x^2+9)} = ?$ Vamos decompor em frações parciais.

$$\frac{2x^2+18}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

Obs.: simplificando no início evitaria toda a decomp. em frações parciais

$$= \frac{A\cdot(x^2+9) + (Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+9)}$$

$$= \frac{Ax^2+9A + Bx^2+3Bx + Cx + 3C}{(x+3)(x^2+9)}$$

$$\Longleftrightarrow 2x^2+18 = Ax^2+9A+Bx^2+3Bx+Cx+3C$$

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ 3B+C = 0 \\ 9A + 3C = 18 \end{cases} \quad 3B+C=0 \rightarrow \boxed{C=-3B}$$

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ 9A+3(-3B) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 2 \\ 9A-9B = 18 \quad (\div 9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+\cancel{B} = 2 \\ A-\cancel{B} = 2 \end{cases}$$

$$2A = 4 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$B = 2-A$

$\boxed{B=0}$

$C = -3\cdot 0$

$\boxed{C=0}$

Logo:

$$\int \frac{(2x^2+18)\,dx}{(x+3)(x^2+9)} = \int\left(\frac{2}{x+3}+0\right)dx = 2\int\frac{dx}{x+3} = 2\ln|x+3|+c$$

(e) $\int \cos^5(2x-1)\,dx = \int \left(\cos^2(2x-1)\right)^2 \cdot \cos(2x-1)\,dx =$

$= \int \left[1 - sen^2(2x-1)\right]^2 \cdot \cos(2x-1)\,dx =$

$= \int \left[1 - 2\,sen^4(2x-1) + sen^2(2x-1)\right] \cos(2x-1)\,dx =$

$= \int \cos(\underline{2x-1})\,dx - 2 \cdot \int \left[sen(\underline{2x-1})\right]^4 \cos(\underline{2x-1})\,dx + \int \left[sen(\underline{2x-1})\right]^2 \cdot \cos(\underline{2x-1})\,dx$

$r = 2x-1$

$\hookrightarrow dr = 2dx$

$dx = \frac{dr}{2}$

$= \int \cos r \cdot \frac{dr}{2} - 2 \cdot \int (sen\, r)^4 \cdot \cos r \cdot \frac{dr}{2} + \int (sen\, r)^2 \cdot \cos r \cdot \frac{dr}{2}$

$w = sen\, r \Rightarrow dw = \cos r \cdot dr$ $\underline{ok!}$

$= \frac{1}{2} \cdot sen\, r - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \int w^4 dw + \frac{1}{2} \int w^2 \cdot dw =$

$= \frac{1}{2} sen(2x-1) - \frac{w^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w^3}{3} + c =$

$= \frac{1}{2} sen(2x-1) - \frac{(sen\, r)^5}{5} + \frac{(sen\, r)^3}{6} + c$

$= \frac{1}{2} sen(2x-1) - \frac{sen^5(2x-1)}{5} + \frac{sen^3(2x-1)}{6} + c$

(f) $\displaystyle\int \frac{(2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

$2-3x = -\frac{3}{2}(2x+3)+\alpha =$

$= -3x-\frac{9}{2}+\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned}-\tfrac{9}{2}+\alpha &= 2\\ \alpha &= 2+\tfrac{9}{2}\\ \alpha &= \tfrac{13}{2}\end{aligned}}$$

$u = x^2+3x-1 \Rightarrow du = (2x+3)\,dx.$

$$\int \frac{(2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2+3x-1}} = \int \frac{-\frac{3}{2}(2x+3)+\frac{13}{2}}{\sqrt{x^2+3x-1}} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+3x-1}} + \frac{13}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$= -\frac{3}{2}\int (\underbrace{x^2+3x-1}_{u})^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+3)\,dx + \frac{13}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$\int u^k\,du$

$$= -\frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{(x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + \frac{13}{2}\int \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}}}}$$

$x^2+3x-1 = (x+a)^2+b$

$= x^2+2ax+a^2+b$

$2a=3$

$a = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned}a^2+b &= -1\\ \tfrac{9}{4}+b &= -1\\ b &= -1-\tfrac{9}{4}\\ b &= -\tfrac{13}{4}\end{aligned}}$$

$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u-\sqrt{u^2-a^2}|+C$

$$= -3\sqrt{x^2+3x-1} + \frac{13}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}\right| + C$$

$$= -3\sqrt{x^2+3x+1} + \frac{13}{2}\cdot\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-1}\right| + C$$

---

02) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx = \frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$:

$$\int \frac{x^2-2}{x^2(x-1)}\,dx = ?$$

$$\frac{x^2-2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2 = Ax - A + Bx^2 - Bx + Cx^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=1 \\ A-B=0 \\ -A=-2 \end{cases} \Rightarrow A=2$$

$$-2-B=0 \Rightarrow B=2$$

$$B+C=1$$

$$2+C=1$$

$$\Rightarrow C=-1$$

Portanto, obtemos:

$$\int \frac{x^2-2}{x^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$2\int x^{-2}dx + 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{2x^{-1}}{-1} + 2\ln|x| - \ln|x-1| + C$$

$$= -\frac{2}{x} + 2\ln|x| - \ln|x-1| + C.$$

Assim, usando o T.F.C, temos:

$$\int_2^4 \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx = \left(-\frac{2}{x}+2\ln|x|-\ln|x-1|\right)\Big|_2^4 =$$

$$= -\frac{2}{4} + 2\ln 4 - \ln 3 + \frac{2}{2} - 2\ln 2 + \underbrace{\ln 1}_{=0}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \ln 4^2 - \ln 3 - \ln 2^2$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \frac{4^2}{3.2^2} = \frac{1}{2} + \ln \frac{16}{12} = \frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}$$

03) $$\frac{dp}{dt} = -\sqrt{p} \iff \frac{dp}{\sqrt{p}} = -dt$$

$$\iff \int \frac{dp}{\sqrt{p}} = -\int dt \iff \int p^{-\frac{1}{2}} dp = -t + C$$

$$\iff \frac{p^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -t + C$$

$$2\sqrt{p} = -t + C$$

Quando $t = 0$, $p = 676$. Logo:

$$2\sqrt{676} = 0 + C \Rightarrow C = 52$$

Disso, temos a equação:

$$2\sqrt{p} = -t + 52 .$$

Por fim, obtemos: quando $p = 0$:

$$2\sqrt{0} = -t + 52 \Rightarrow \boxed{t = 52 \text{ semanas}}$$

04)

(a) $V = V_R + V_L$

$$V = R.i + L.\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow V - R.i = L.\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{V-Ri} = \frac{dt}{L} \Rightarrow \int \frac{di}{V-Ri} = \frac{1}{L}.\int dt$$

$$\hookrightarrow \int \frac{du}{u} \quad ; \quad u = V - Ri$$
$$du = -R\,di$$
$$di = -\frac{du}{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-\frac{du}{R}}{u} = \frac{1}{L}.t + C$$

$$-\frac{1}{R}.\ln|u| = \frac{t}{L} + C \Rightarrow \ln|u| = -\frac{Rt}{L} - C$$

$$\Rightarrow e^{\ln|u|} = e^{-\frac{R}{L}t - C}$$

$$u = e^{-\frac{R}{L}.t}.\underbrace{e^{-C}}_{=: K \text{ (constante}}$$

$$\Rightarrow u = K.e^{-\frac{R}{L}t}$$

Ou seja; $V - Ri = K.e^{-\frac{R}{L}t}$

$$V = Ri + K.e^{-\frac{R}{L}t}$$

Quando $t=0$, tem-se $i=0$; e disso:

$$V = R \cdot 0 + K \cdot e^{0} \Rightarrow K = V.$$ Assim;

obtemos:

$$V = R \cdot i + V \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$V - V \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = R \cdot i$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)}$$

(b) $R = 10\,\Omega$; $L = 3\,H$; $V = 50\,V$; então:

$$i = \frac{50}{10} \cdot \left(1 - e^{\frac{10}{3} t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{i = 5 \cdot \left(1 - e^{\frac{10}{3} t}\right)}$$