CÁLCULO IV

23/02/24 – AULA 17

No final da aula passada introduzimos os conceitos de divergência e rotacional de um campo vetorial $\vec{F}$.

Simbolicamente, podemos representar sua notação e aplicação em termos de operadores, usando o produto escalar para o divergente e produto vetorial para o rotacional, como segue:

- $$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \underbrace{(F_1, F_2, \ldots, F_n)}_{\vec{F}}$$

$$= \nabla \cdot \vec{F}$$

- $$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3)$$

$$= \nabla \times \vec{F}$$

Ex: $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + z\,\vec{j} + (x^2+y^2)\,\vec{k}$.

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{F}}_{\text{div } F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (xy,\ z,\ x^2+y^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2)$$

$$= y + 0 + 0 = y$$

Obs.: O divergente e o rotacional de $\vec{F}$ cumprem as seguintes igualdades:

(i) $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$, $\quad f$: função escalar de classe C^2

(ii) $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ $\quad \vec{F}$: campo vetorial de classe C^2.

DEMONSTR.: Provaremos usando as notações com operadores introduzidos acima.

(i) $$\text{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{matrix}$$

$$= \overbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)}^{0}\vec{i} + \overbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)}^{0}\vec{j} + \overbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)}^{0}\vec{k}$$

$$= (0,0,0) = \vec{0}.$$

(ii) fica como um exercício.

$\square$

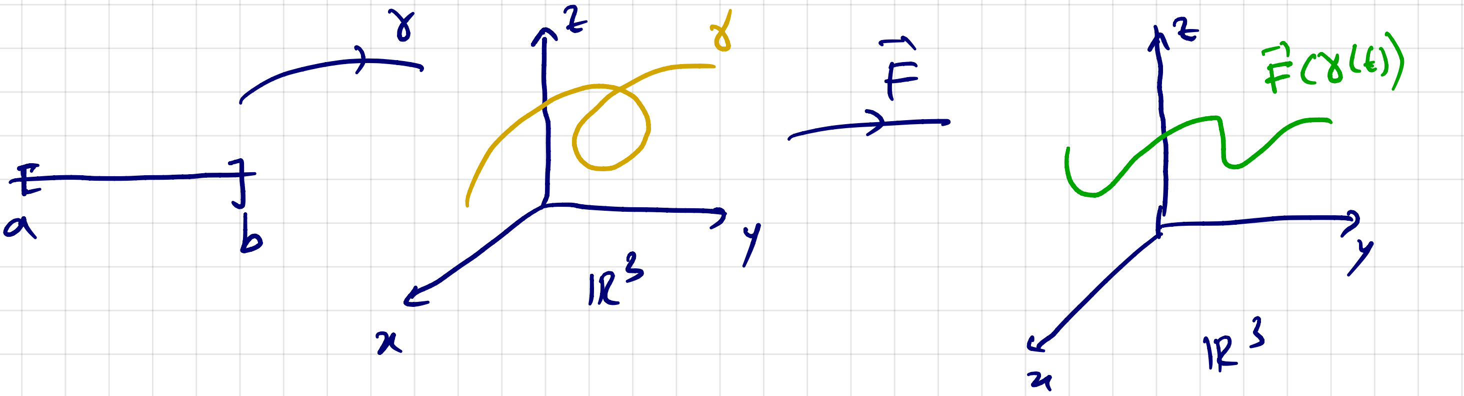
INTEGRAIS DE LINHA:

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva suave (i.e, derivável com $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]$), dada por:

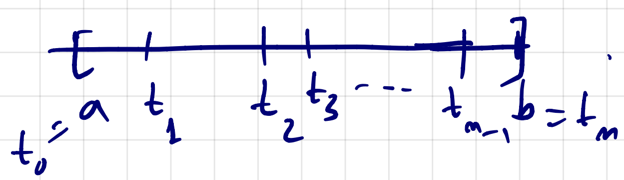
$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Seja $\vec{F} : \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial definido sobre a curva γ, dado por

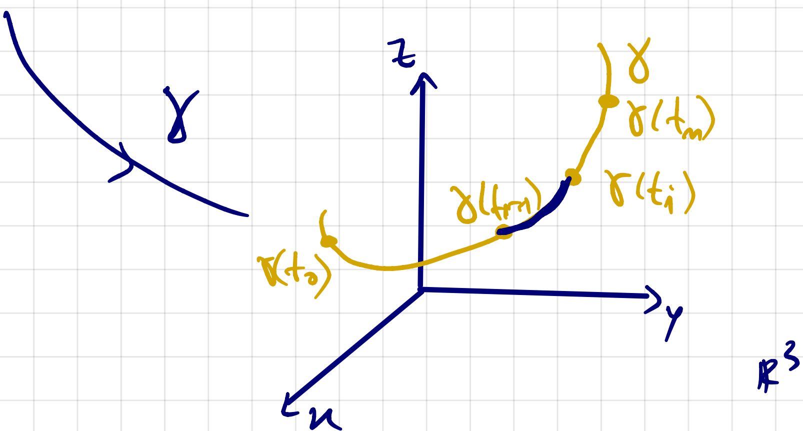
$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} = \vec{F}(\gamma(t))$$



Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$, determinando neste intervalo subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

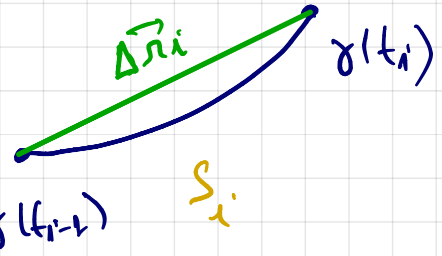


Isto determina em γ arcos $S_i = \overset{\frown}{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}$



Seja $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ um ponto qualquer no subintervalo da partição P, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Seja $\Delta \vec{r}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$.



Disso, temos:

$$\Delta \vec{r}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$$

Como γ é derivável, $\gamma'(t) \neq 0$, pelo T.V.M, segue que $\exists\, d_i$ entre t_{i-1} e t_i tal que

$$\Delta \vec{r}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \gamma'(d_i).(t_i - t_{i-1})$$
$$= \gamma'(d_i).\Delta t_i$$

Montando a soma de Riemann, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\gamma(c_i)).\Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(c_i)).\gamma'(d_i).\Delta t_i$$

Passando o limite com $n \to \infty$ (i.e, $\|P\| \to 0$), vamos obter:

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt ,}$$

chamada de INTEGRAL DE LINHA de $\vec{F}$ ao longo da curva γ; onde $\vec{r}$ representa o traçado da curva γ.

Podemos abrir a notação de integral de linha como segue: sendo $\vec{F}(x,y,z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, então

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b \big(P(x(t),y(t),z(t)); Q(x(t),y(t),z(t)); R(x(t),y(t),z(t))\big) \cdot \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) \cdot dt =$$

PRODUTO ESCALAR

Note que

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) \cdot dt = \left(\frac{dx}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt}, \frac{dy}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt}, \frac{dz}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt}\right) =$$

$$= (dx, dy, dz)$$

Então:

$$= \int_a^b (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \int_a^b (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

Vejamos alguns exemplos:

01) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$$

Calcule a integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ em $[0, 2\pi]$.

SOLUÇÃO:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = ?$$

Como $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, e

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2),$$

segue que

$$\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\,dt$$

PROD. ESCALAR

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\cancel{\operatorname{sen} t \cdot \cos t} + \cancel{\operatorname{sen} t \cdot \cos t} + t^2 \cdot 1\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^3}{3} - 0 = \frac{8\pi^3}{3}$$

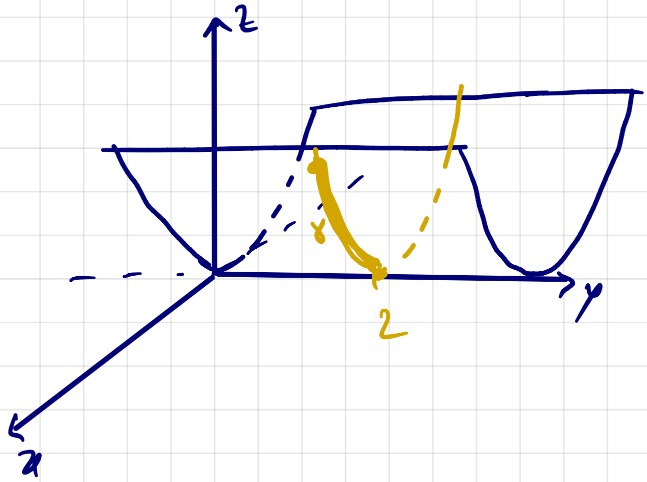
---

02) Calcule $\int_\gamma 2x\,dx + 4z\,dy + 3z\,dz$ ao longo da parábola $z = x^2$, $y = 2$, do ponto $A(0,2,0)$ ao ponto $B(2,2,4)$.

SOLUÇÃO:

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = t^2 \end{cases}$$

A: $\left.\begin{array}{l} t = x = 0 \\ y = 2 \\ t^2 = z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0$



B: $\left.\begin{array}{l} t = x = 2 \\ y = 2 \\ t^2 = z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 2$

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^2 P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$P = 2x = 2t$

$Q = yz = 2 \cdot t^2$

$R = 3z = 3 \cdot t^2$

pelo γ

$x = t \Rightarrow dx = dt$

$y = 2 \Rightarrow dy = 0$

$z = t^2 \Rightarrow dz = 2t\, dt$

$$= \int_0^2 2x\, dx + yz\, dy + 3z\, dz = \int_0^2 2t \cdot dt + 2t^2 \cdot 0 + 3t^2 \cdot 2t\, dt$$

$$= \int_0^2 (2t + 6t^3)\, dt = \left(t^2 + \frac{3t^4}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 + 3 \cdot \frac{\cancel{2^4}^{\,3}}{\cancel{2}} - 0$$

$$= 4 + 24 = 28$$

03) Calcule $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (x^2 y, xy)$ e γ é a parábola $x = y^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(4,2)$.

(EXERCÍCIO)