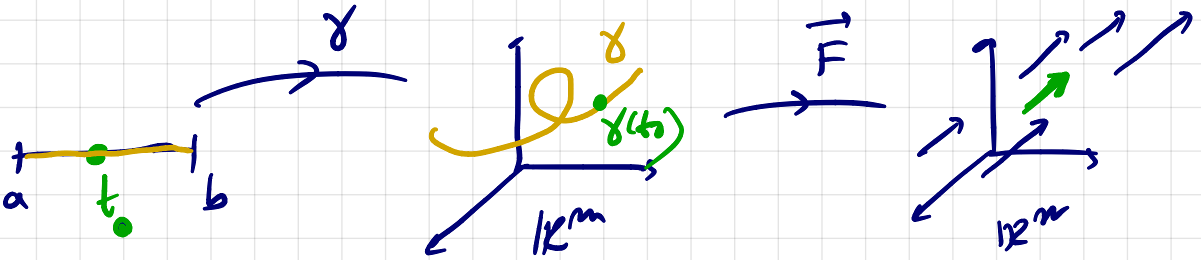
CÁLCULO IV :

28/02/24 – AULA 18

Na aula passada introduzimos o conceito de integral de linha: sendo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ um caminho, e

$\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial com $(\gamma([a,b]) \subset \Omega$,

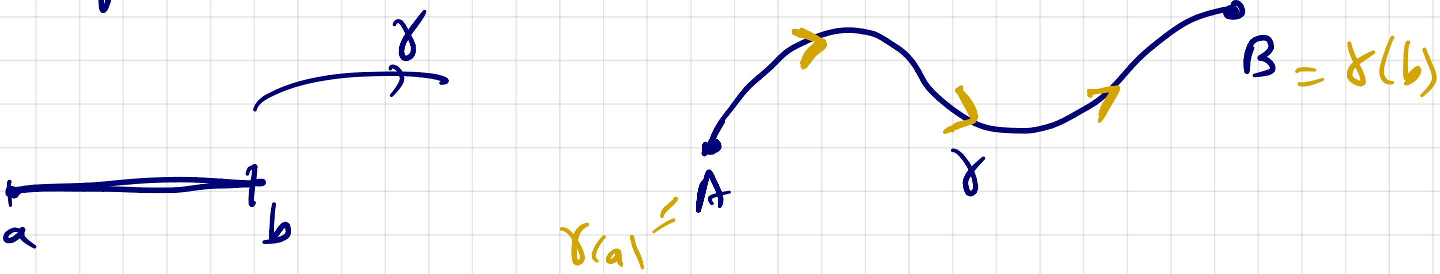


então
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt .$$

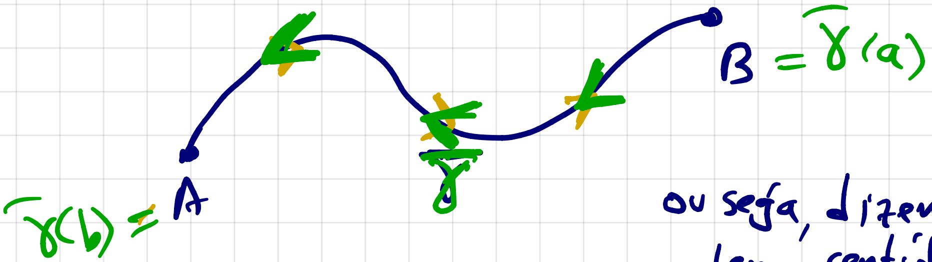
Veremos na aula de hoje, que, se tomarmos outra parametrização para a mesma curva γ, o resultado da integral de linha não se altera, desde que mantenha a mesma ORIENTAÇÃO.

Antes, porém, formalizemos este conceito de orientação.

Dada uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$. Diremos que a ORIENTAÇÃO de γ é de A para B.



Uma curva $\bar{\gamma}$ vai possuir uma orientação contrária à curva γ, se elas possuírem o mesmo traçado (i.e., mesmo caminho), mas tal que $\bar{\gamma}(a) = B$ e $\bar{\gamma}(b) = A$.



ou seja, dizemos que tem sentido oposto ao da curva γ.

Uma curva γ pode possuir diferentes parametrizações (desde que mantenha mesmo traçado).
Por exemplo, da Geom. Analítica, temos que, podemos parametrizar uma reta de diferentes formas, tomando pontos diferentes sobre a mesma e vetores diretores diferentes também.

Isto posto, precisamos de um resultado que, dado um caminho γ, seja garantido que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independa da parametrização para γ. Ou seja, provaremos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: A integral $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ independe de parametrização para o caminho γ, desde que as parametrizações para γ possuam mesma orientação.

DEMONSTR.: Para simplificar a escrita vamos provar no caso $\mathbb{R}^2$. No entanto, a prova vale para $\mathbb{R}^m$.
Seja $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ um caminho dado por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) ,$$

e seja $\vec{F}:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, com $\gamma([a,b])\subset\Omega$, um campo vetorial, dado por

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

Seja $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ tal que $\varphi'(u)>0$, $\forall u$, tal que $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$.

e considere $\bar{\gamma}:[c,d]\to\mathbb{R}^2$, dado por

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$$

[estas construções fazem com que $\bar{\gamma}$ seja outra parametrização para γ, e com mesma orientação]

Note que $\bar{\gamma}(c) = \gamma(\varphi(c)) = \gamma(a)$, e

$$\bar{\gamma}(d) = \gamma(\varphi(d)) = \gamma(b)$$

Dessa forma, temos:

$$\int_{\bar{\gamma}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_c^d \vec{F}(\bar{\gamma}(u))\cdot\bar{\gamma}'(u)\,du =$$

$$= \int_c^d \vec{F}(\gamma(\varphi(u)))\,\underbrace{(\gamma\circ\varphi)'(u)}_{\gamma'(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)}\,du \;=$$

$\gamma'(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)$ (regra da cadeia)

obs.: $\gamma(\varphi(u)) = \big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big) = \big((x\circ\varphi)(u),\ (y\circ\varphi)(u)\big)$

$\Rightarrow \gamma'(\varphi(u)) = \big((x\circ\varphi)'(u),\ (y\circ\varphi)'(u)\big)$

$$= \int_c^d \Big(P\big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big),\ Q\big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big)\Big)\cdot\gamma'(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)\,du$$

$$= \int_c^d \Big(P\big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big),\ Q\big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big)\Big)\cdot\big((x\circ\varphi)'(u),\ (y\circ\varphi)'(u)\big)\cdot\varphi'(u)\,du$$

PRODUTO ESCALAR

$$= \int_c^d \Big[P\big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big)\cdot\underbrace{(x\circ\varphi)'(u)}_{x'(\varphi(u))} + Q\big(x(\varphi(u)),\ y(\varphi(u))\big)\cdot\underbrace{(y\circ\varphi)'(u)}_{y'(\varphi(u))}\Big]\,\varphi'(u)\,du$$

$$= \int_c^d \Big[P\big(x(\underbrace{\varphi(u)}_{t}),\ y(\underbrace{\varphi(u)}_{t})\big)\cdot x'(\underbrace{\varphi(u)}_{t}) + Q\big(x(\underbrace{\varphi(u)}_{t}),\ y(\underbrace{\varphi(u)}_{t})\big)\cdot y'(\underbrace{\varphi(u)}_{t})\Big]\,\underbrace{\varphi'(u)\,du}_{dt} \;=$$

Escreva $\varphi(u) = t$. Então $dt = \varphi'(u)\,du$. Disso,

$$u = c \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(c) = a$$
$$u = d \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(d) = b$$
, e então teremos:

$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t)) \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + Q(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} =$$

$$= \int_a^b P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}.$$

Ou seja, $\bar{\gamma}$ e γ são duas parametrizações para o mesmo caminho γ, tal que

$$\int_{\bar{\gamma}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r},$$

o que conclui a demonstração.

$\blacksquare$

Vejamos um exemplo: calcular $\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$, onde $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2)$ e γ é a reta ligando $A(1,1)$ a $B(2,4)$.

Solução:

Considere a seguinte parametrização para γ:

$$\gamma : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$$

; (a,b) vetor diretor, dado por:

$$(a,b) = (2,4) - (1,1) = (1,3)$$

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

Disso: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

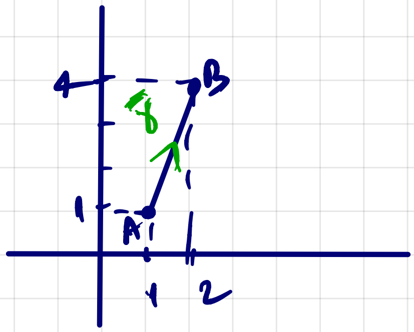
$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 (xy, x^2) \cdot (1,3)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left((1+t)\cdot(1+3t), (1+t)^2 \right) \cdot (1,3)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left[(1+4t+3t^2)\cdot 1 + (1+2t+t^2)\cdot 3 \right] dt$$

$$= \int_0^1 (4+10t+6t^2)\, dt = \left(4t + 5t^2 + 2t^3\right)\Big|_0^1 = 4+5+2-0 = 11.$$

Tomemos outra parametrização para γ, com mesma orientação, para verificar que o resultado não se altera, ou seja, o valor da integral continuará sendo 11.



Vamos considerar uma $\bar{\gamma}: [1,2] \to \mathbb{R}^2$

Seja

$$\varphi(u) = (u-1)^2.$$

$$\Rightarrow \varphi'(u) = 2(u-1) > 0 \text{ em } [1,2]$$

e tal que

$$\begin{cases} \varphi(1) = (1-1)^2 = 0 \\ \varphi(2) = (2-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Com isso, define $\bar{\gamma}: [1,2] \to \mathbb{R}^2$, pondo:

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u)) = (1+\varphi(u), 1+3.\varphi(u))$$

$$\gamma(t) = (1+t, 1+3t)$$

$$= (\underbrace{1+(u-1)^2}_{x}, \underbrace{1+3.(u-1)^2}_{y}).$$

Assim, temos:

$$\int_{\bar{\gamma}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}(\bar{\gamma}(u)).\bar{\gamma}'(u)\, du \text{ , onde:}$$

$$\bar{\gamma}'(u) = (2(u-1), 6(u-1))$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{\gamma}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_1^2 (xy, x^2).(2(u-1), 6(u-1))\, du$$

$$= \int_1^2 \left[(1+(u-1)^2) \cdot (1+3(u-1)^2) \cdot 2(u-1) + (1+(u-1)^2)^2 \cdot 6(u-1) \right] du$$

$$= u \cdot (2u^5 - 12u^4 + 35u^3 - 60u^2 + 64u - 40) \Big|_1^2 = \underline{\underline{11}}$$

como previamos!!!

O próximo resultado corresponde à versão vetorial para o T.F.C., do saudoso Cálculo I.

Veremos na próxima aula. (não deu tempo! :-)