CÁLCULO IV

21/02/24 – AULA 16

CÁLCULO VETORIAL A VÁRIAS VARIÁVEIS:

CAMPOS VETORIAIS:

Def.: Chama-se um CAMPO VETORIAL toda função

$$\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \overset{\vec{F}}{\longmapsto} \left(F_1(x_1, \dots, x_m), F_2(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m)\right)$$

Por exemplo, na Álgebra linear, poderíamos considerar operadores lineares como sendo campos vetoriais.

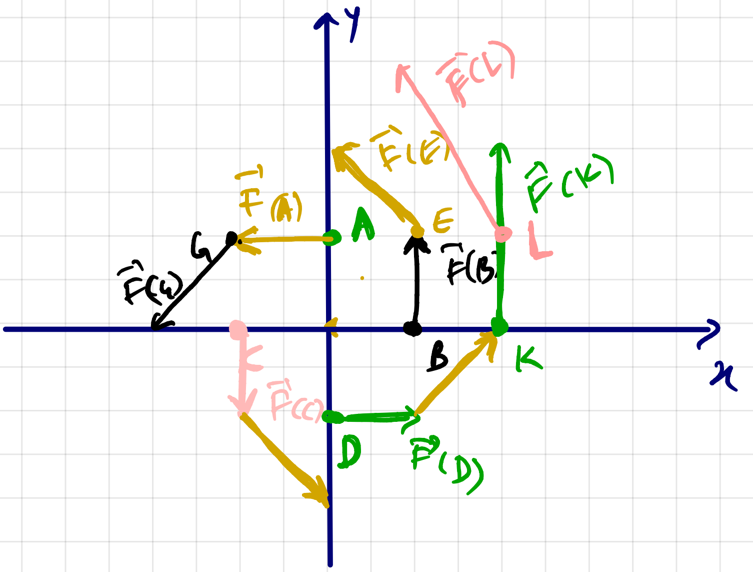
Como já sabemos, existe uma correspondência biunívoca entre ponto e vetor. Dessa maneira, vamos considerar que um campo vetorial do $\mathbb{R}^m$ manda um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ (ou vetor, devido à correspondência biunívoca) para um vetor $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^m$.

Ex.: 01) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$

Vamos marcar alguns pontos para traçar uma ideia/esboço do campo vetorial dado.

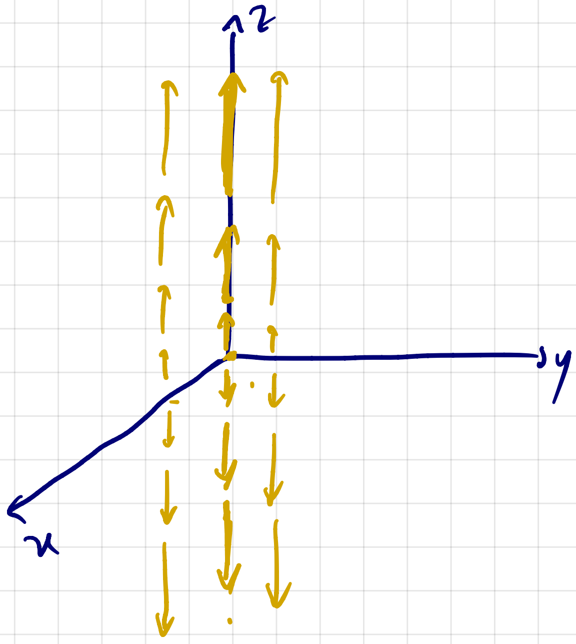
	(x,y)	$\vec{F}(x,y) = (-y, x)$	
A	$(0,1)$	$(-1, 0)$	$= \vec{F}(A)$
B	$(1,0)$	$(0, 1)$	$= \vec{F}(B)$
C	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$= \vec{F}(C)$
D	$(0,-1)$	$(1, 0)$	$= \vec{F}(D)$
E	$(1,1)$	$(-1, 1)$	$= \vec{F}(E)$
G	$(-1,1)$	$(-1,-1)$	
	$(-1,-1)$	$(1,-1)$	

— a marcação de $\vec{F}(A)$ dá-se a partir do ponto A, e assim com todos os demais pontos.



	(x,y)	$F(x,y)=(-y,x)$
K	$(2,0)$	$(0,2)=\vec{F}(K)$
L	$(2,1)$	$(-1,2)$
	$(2,-1)$	$(1,2)$

Ex.02): $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=(0,0,z)$



Def.: Seja $\varphi:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função escalar. Dizemos que um campo $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é um campo gradiente se $\nabla\varphi=\vec{F}$.

Obs.:
- Um sinônimo para CAMPO GRADIENTE é CAMPO CONSERVATIVO.
- A função φ da definição acima chama-se uma função potencial para o campo $\vec{F}$.

Obs.: Lembrando do cálculo III, dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, então

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

Ex.: Dado $\vec{F}(x,y) = (y^2+2x+4)\vec{i} + (2xy+4y-5)\vec{j}$, qual a função potencial φ, se existir, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$?

Solução: Queremos $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$, ou seja, tal que

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(y^2+2x+4,\ 2xy+4y-5 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2+2x+4 \quad (*) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy+4y-5 \quad (**)$$

Integrando $(*)$ em x, vem:

$$\varphi(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \int (y^2+2x+4)\, dx$$

$$= y^2x + x^2 + 4x + g(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y)$$

Derivando em y e comparando com $(**)$, obtemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yx + 0 + 0 + g'(y) \underset{(**)}{=} 2xy + 4y - 5$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2xy} + g'(y) = \cancel{2xy} + 4y - 5$$

$$g'(y) = 4y - 5$$

$$\Rightarrow g(y) = \int (4y-5)\,dy = 2y^2 - 5y + C$$

Disso, concluímos que existe uma função potencial $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + C.$$

De fato, $\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

$$= \left(y^2 + 2x + 4,\ 2xy + 4y - 5\right) = \vec{F}(x,y)$$

$\square$

No que segue, enunciaremos um teorema que serve para decidir se um campo é gradiente. (em $\mathbb{R}^2$)

TEOREMA: Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ um campo vetorial, com P e Q possuindo derivadas $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ contínuas.

Então $\vec{F}$ será um campo gradiente se, e somente se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Por exemplo, revisitando o exemplo acima, onde foi dado $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (y^2 + 2x + 4,\ 2xy + 4y - 5)$.

Neste caso, temos

$$P(x,y) = y^2 + 2x + 4 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x,y) = 2xy + 4y - 5 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y,$$

que é contínua.

Logo, $\vec{F}$ é de fato um campo gradiente.

Vejamos outro exemplo:

Ex.: Dado $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$, prove que $\vec{F}$ é conservativo (i.e., um campo gradiente) e em seguida, determine uma função potencial φ para este campo.

solução: exercício para entregar na sexta, dia 23/02.

DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL DE CAMPOS VETORIAIS:

Def.: Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial. Definimos a divergência de $\vec{F}$ por:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{tr}\left(J(\vec{F})\right).$$

Ou seja; sendo

$$\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n), \quad F_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$F_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

então

$$J(\vec{F}) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \cdots & F_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $F_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Disso, temos, da def. acima, que

$$\operatorname{div} \vec{F} = F_{11} + F_{22} + F_{33} + \cdots + F_{nn} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

No caso em $\mathbb{R}^3$, dado

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ex.: $\vec{F}(x,y,z) = (\underbrace{x^2y + z^2}_{F_1}, \underbrace{\operatorname{sen} xy}_{F_2}, \underbrace{xz^2}_{F_3})$,

então

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = 2xy + x.\cos xy + 2xz$$

<u>Def.:</u> Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial do $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

Definimos o rotacional de $\vec{F}$ por:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

que é um tanto difícil de memorizar. Felizmente, há um procedimento mnemônico (simbólico) já consagrado na literatura, dado por:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R & P & Q \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array} \right.$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}$$

<u>Ex.:</u> $\vec{F}(x,y,z) = \left(xy - z,\ z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \right)$, determine $\operatorname{rot} \vec{F}$.

<u>Solução:</u>

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xy-z & z^2 & x^2+y^2+z^2 & xy-z & z^2 \end{array} \right|$$

$$= 2y\,\vec{i} - 1\,\vec{j} + 0\,\vec{k} - x\,\vec{k} - 2z\,\vec{i} - 2x\,\vec{j}$$

$$= (2y-2z)\,\vec{i} + (-1-2x)\,\vec{j} - x\,\vec{k}.$$