CÁLCULO 2

27/02/24 – AULA 19

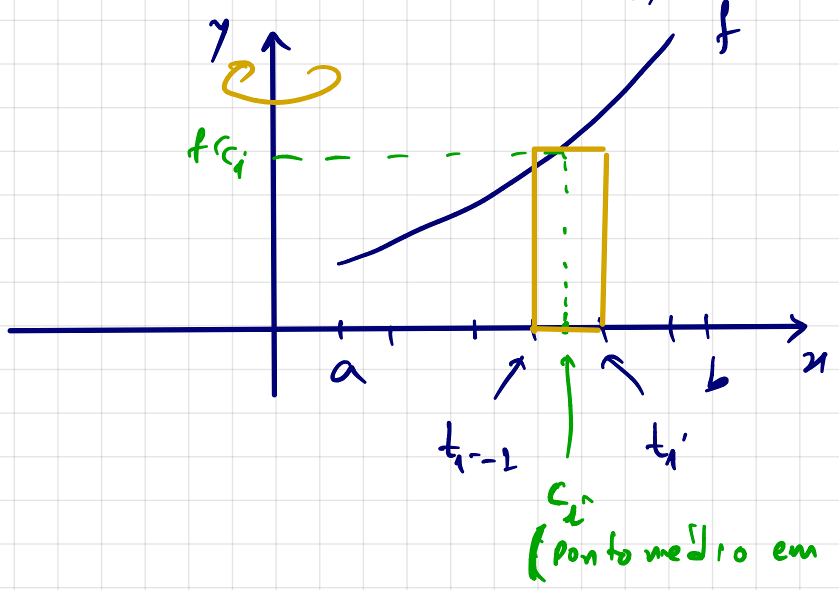
## VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO PELO MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO.

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e considere $P = \{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \}$ uma partição de $[a,b]$. Assuma $f \geq 0$ em $[a,b]$.

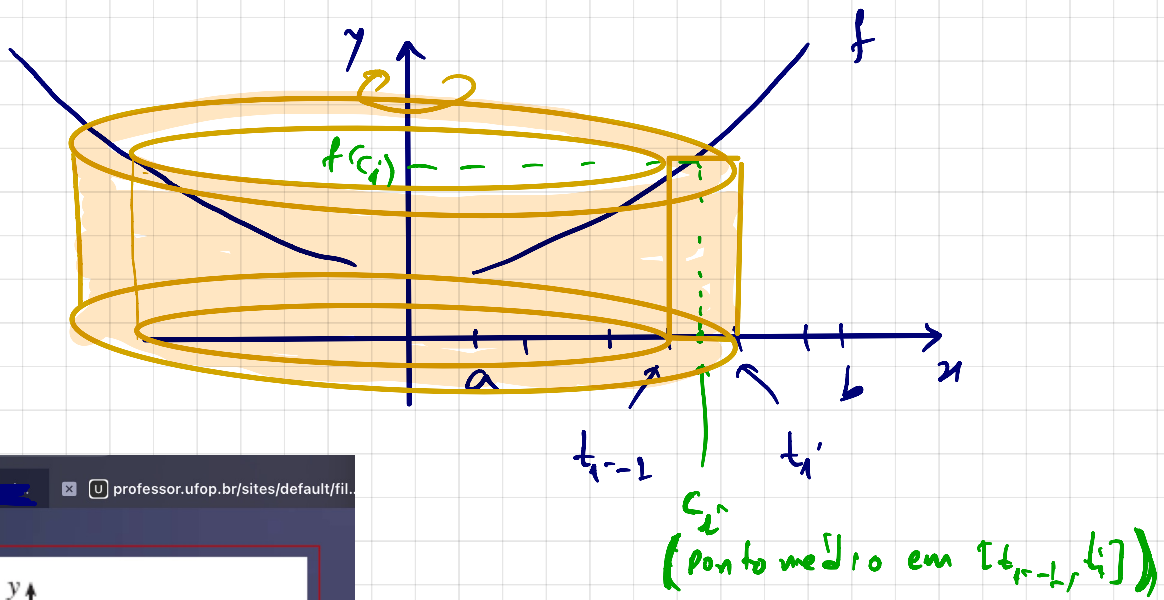
Tome $c_i$ um ponto em $[t_{i-1}, t_i]$, mas agora será o ponto médio de cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, ou seja,

$$c_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}. \qquad (*)$$

Considere os retângulos elementares de base $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ e altura $f(c_i)$




Obs: Note que no método do disco, o giro do retângulo elementar para construir o somatório é feito sobre o eixo em que está a partição. Já no método do invólucro cilíndrico o giro do mesmo retângulo será no eixo em que não foi feita a partição, gerando um outro sólido.



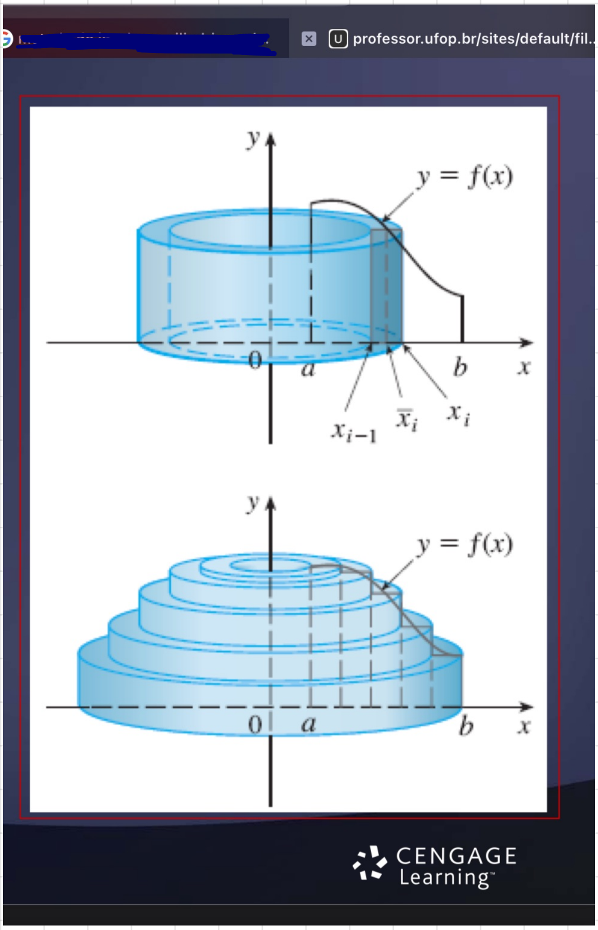
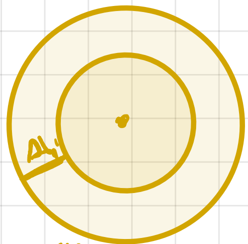




ILUSTRAÇÃO P/ MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO. IMAGEM EXTRAÍDA DA INTERNET, FONTE NA IMAGEM.




VISTA DE CIMA DE UM INVÓLUCRO CILÍNDRICO

Seja $V_i$ o volume do i-ésimo invólucro (casca) que será dado por

$$V_i = A_{b_i} \cdot h_i - A_{b_{i-1}} \cdot h_{i-1} \quad ; \quad h_i = h_{i-1} = f(c_i)$$

$$V_i = \pi \cdot R_i^2 \cdot f(c_i) - \pi \cdot R_{i-1}^2 \cdot f(c_i)$$

$$V_i = \pi \cdot t_i^2 \cdot f(c_i) - \pi \cdot t_{i-1}^2 \cdot f(c_i)$$

$$V_i = \pi \cdot f(c_i) \cdot (t_i^2 - t_{i-1}^2)$$

$$V_i = \pi . f(r_i) . \underbrace{(t_i + t_{i-1})}_{2.c_i,\ \text{POR } (*)} . \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

$$\Rightarrow V_i = 2\pi . c_i . f(r_i) . \Delta t_i$$

O volume $\tilde{V}$ aproximado do sólido S será:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi . c_i . f(r_i) . \Delta t_i$$

$$= 2\pi . \sum_{i=1}^{n} c_i . f(r_i) . \Delta t_i$$

O volume V será o limite de $\tilde{V}$ com $n \to \infty$, ou seja, obtemos o limite da seguinte soma de Riemann:

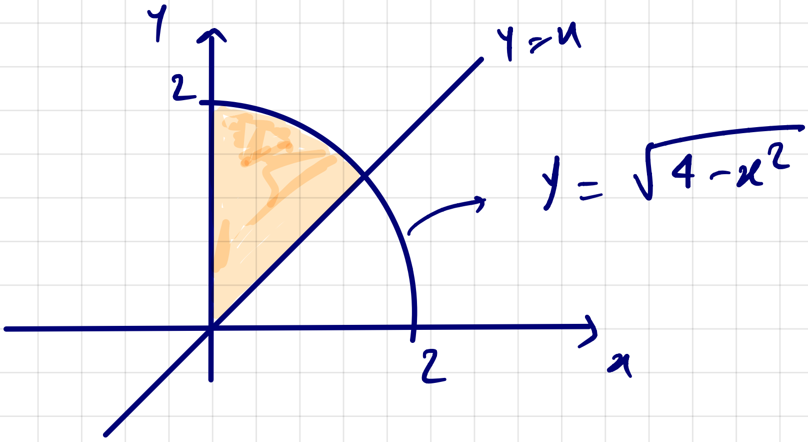
$$V = \lim_{n\to\infty} \tilde{V} = \lim_{n\to\infty} 2\pi . \sum_{i=1}^{n} c_i . f(r_i) . \Delta t_i$$

$$= 2\pi . \int_a^b x . f(x)\, dx$$

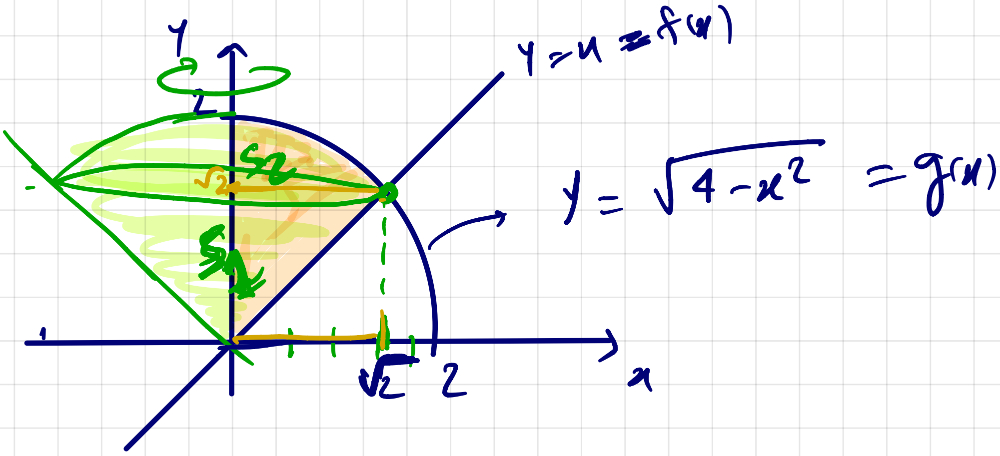
$$\Rightarrow \boxed{V = 2\pi \int_a^b x . f(x)\, dx}$$

EXEMPLOS:

01) Use o método do invólucro cilíndrico para obter o volume do sólido S obtido ao girar a região abaixo, em torno do eixo y:




SOLUÇÃO:



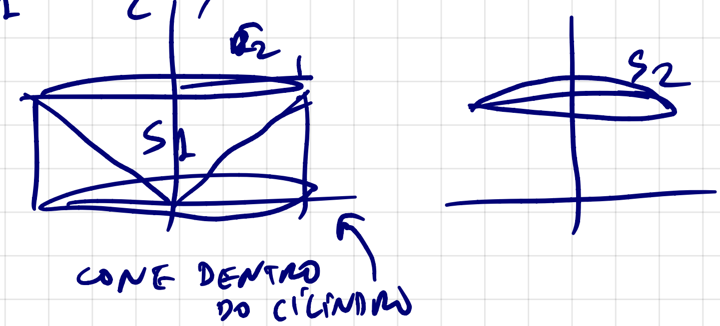

intercepto: $(x)^2 = (\sqrt{4-x^2})^2$

$x^2 = 4 - x^2$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$V = S_1 + S_2$, onde:




$$S_1 = V_{cil} - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot f(x) \cdot dx = \pi (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot x \, dx =$$

$$2\pi\sqrt{2} - 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx = 2\pi\sqrt{2} - 2\pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\sqrt{2} - \frac{2\pi(\sqrt{2})^3}{3} =$$

$$2\pi\sqrt{2} - \frac{2\pi\sqrt{2^{2}\cdot 2}}{3} = 2\pi\sqrt{2} - \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$S_2 = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\cdot g(x)\,dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx =$$

- $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (4-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)\,dx =$

$v = 4-x^2 \Rightarrow dv = -2x\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot(4-x^2)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = 2\pi\left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(4-(\sqrt{2})^2\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}(4-0)^{\frac{2}{3}}\right) =$$

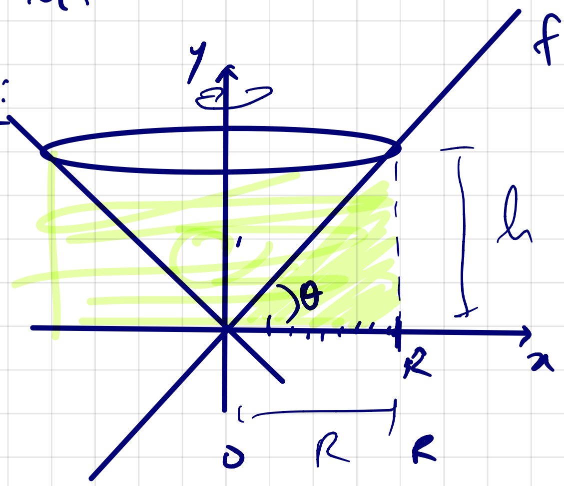
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(2)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}(4)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(4^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$V = S_1 + S_2 = \dots$$

02) Use o método do invólucro cilíndrico para deduzir a fórmula do volume de um cone de raio $R$ e altura $h$.

SOLUÇÃO:




$f(x) = mx + 0$ ;

$m = \tan\theta = \frac{h}{R}$

$f(x) = \frac{h}{R} \cdot x$

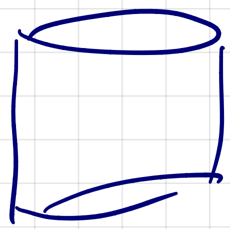
$$V = 2\pi \cdot \int_0^R x \cdot f(x)\, dx = 2\pi \int_0^R x \cdot \frac{h}{R} x\, dx =$$

$$\frac{2\pi h}{R} \cdot \int_0^R x^2 dx = \frac{2\pi h}{R} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^R =$$

$$\frac{2\pi h}{\cancel{R}} \cdot \left(\frac{R^3}{3} - 0\right) = \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

(este é o volume da parte de fora do cilindro maciço.

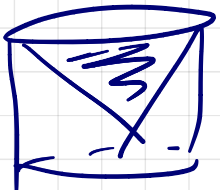
Volume de fora.



$V = A_b \cdot h$

$V = \pi R^2 h$.

Portanto



$V_{cone}$ será:

$$V_{cone} = V_{cil.} - V_{fora.}$$

$$V_{cone} = \pi R^2 h - \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{3\pi R^2 h - 2\pi R^2 h}{3}$$

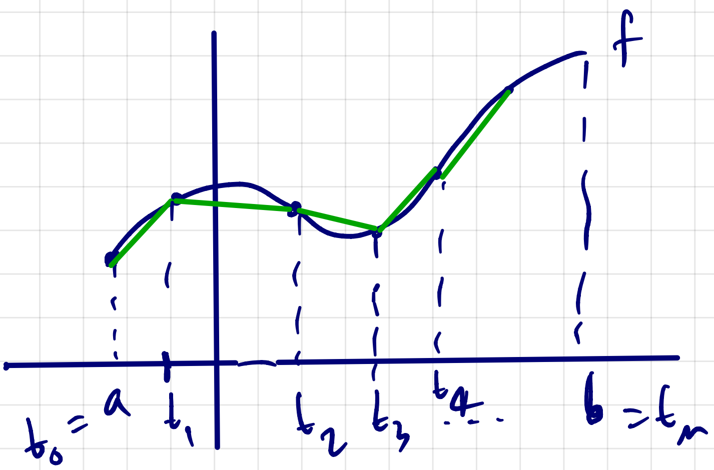
$$= \frac{\pi R^2 h}{3}$$

---

COMPRIMENTO DE UMA CURVA:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $(a,b)$.

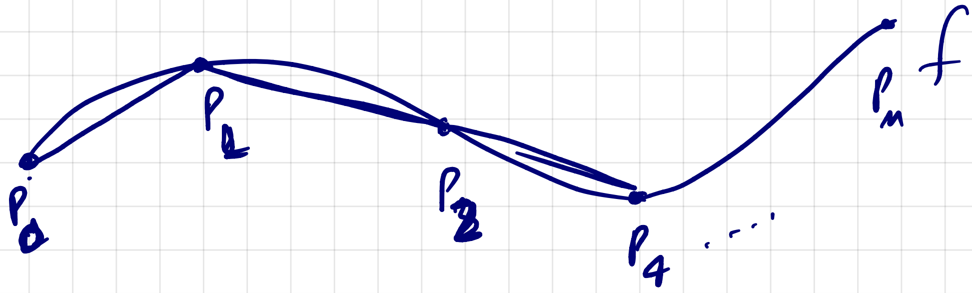
logo, integrável.




Queremos determinar a medida do comprimento da curva dada por $f$ em $[a,b]$.

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$, determinando subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$

Isto vai determinar pontos $P_i(t_i, f(t_i))$ sobre o gráfico de $f$.

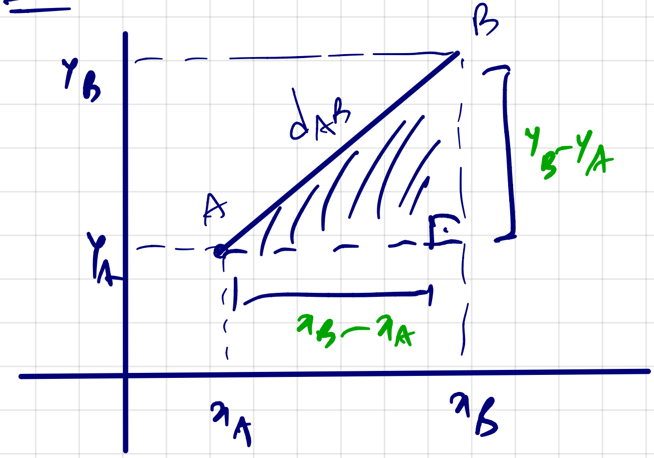



Seja a linha poligonal ligando $P_{i-1}$ e $P_i$

o comprimento $\tilde{\ell}$ dessa linha será dado por

$$\tilde{\ell} = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \circledast$$

obs.:




T. Pitágoras

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Como $f$ é cont. em $[t_{i-1}, t_i]$ e derivável em $(t_{i-1}, t_i)$, pelo T.V.M, segue que $\exists\, c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Assim, teremos:

$$\circledast \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f'(c_i).(t_i - t_{i-1})]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 . (t_i - t_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 . (1 + [f'(c_i)]^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} . \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

$$\Rightarrow \hat{l} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} . \Delta t_i \text{ , uma soma de Riemann.}$$

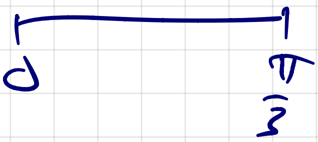
Tomando o limite com $n \to \infty$, temos a medida do comprimento $l$ da curva em $[a, b]$; ou seja:

$$l = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} . \Delta t_i$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Ex.: 01) Obtenha o comprimento da curva $y = \ln \sec x$, da origem ao ponto $P\left(\frac{\pi}{3}, \ln 2\right)$.

Solução: $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{3}$




$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad ; \quad \text{onde}$$

$$f(x) = \ln \sec x \Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{\sec x} \cdot \tan x}{\cancel{\sec x}} = \tan x$$

$$(\ln v)' = \frac{v'}{v}$$

Assim:

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\tan x)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec^2 x}\, dx =$$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \ln\left|\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right| - \ln|\sec 0 + \tan 0|$$

$$= \ln|2 + \sqrt{3}| - \underbrace{\ln|1 + 0|}_{= 0} = \ln(2 + \sqrt{3}).$$