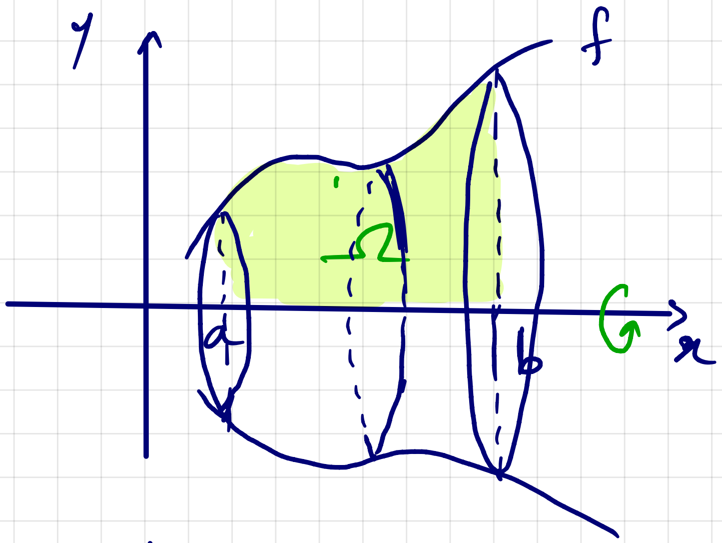
CÁLCULO 2

22/02/24 — AULA 18

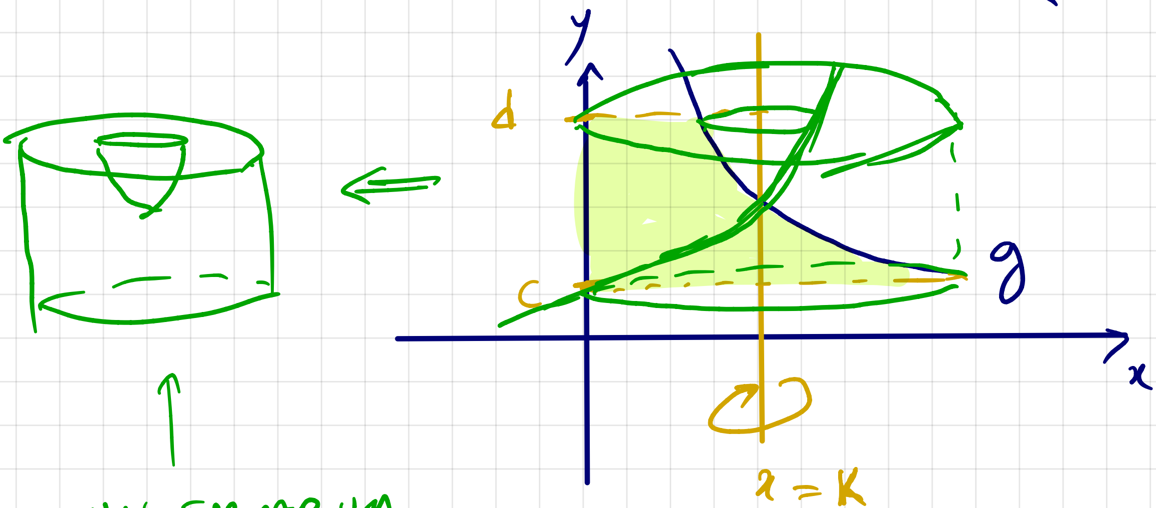
APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA: VOLUMES:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $f \geq 0$. Considerando a região Ω abaixo do gráfico de f em $[a,b]$, se girarmos esta região dando uma volta completa em torno do eixo Ox, vamos obter um SÓLIDO DE REVOLUÇÃO S.

O mesmo se girarmos Ω em torno do eixo Oy ou em torno de uma reta paralela a qualquer um dos eixos.



GIRO EM TORNO DO EIXO OX.



GIRO EM TORNO DA RETA $x = K$, PARALELA AO EIXO OY.

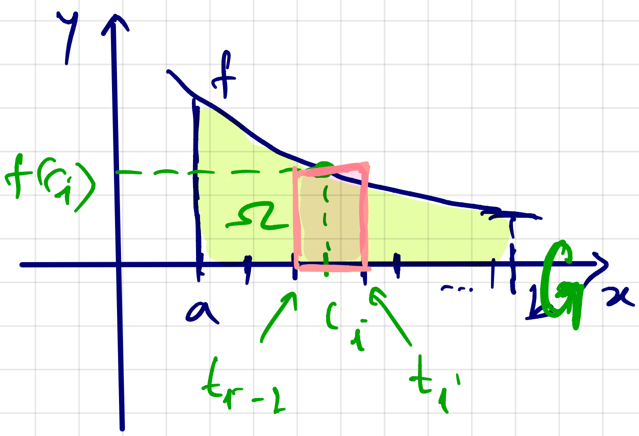
VAI FORMAR UM CILINDRO COM UM "BURACO" EM CIMA.

A saber, são dois métodos de se obter sólidos de revolução: o MÉTODO DO DISCO e o MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO.

MÉTODO DO DISCO: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $f \geq 0$ em $[a,b]$ (para simplificar).

Vamos determinar uma fórmula para encontrar o volume V do sólido S obtido ao girar a região determinada pelo gráfico de f em $[a,b]$, em torno do eixo Ox.

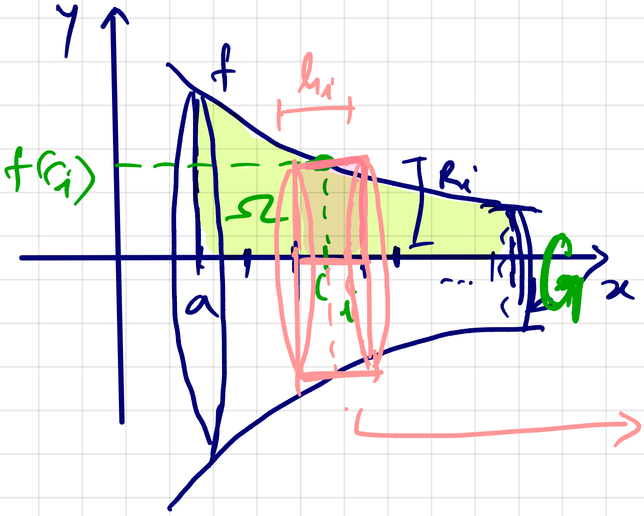
Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ que o subdivide em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de comprimento $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$

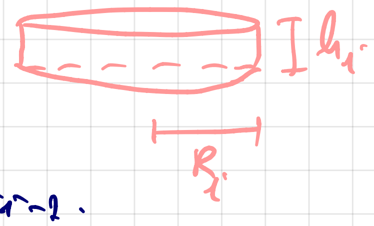


Seja $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ um ponto qualquer, e considere a altura $f(c_i)$.

Tome o retângulo de base $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$ e altura $f(c_i)$

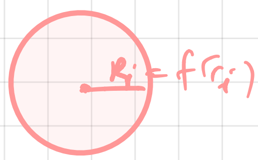
Ao girar Ω em torno do eixo Ox, o retângulo acima destacado vai gerar um cilindro (disco) de volume $V_i = A_b \cdot h$





$$l_i = \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

$$R_i = f(c_i)$$



BASE DO DISCO.

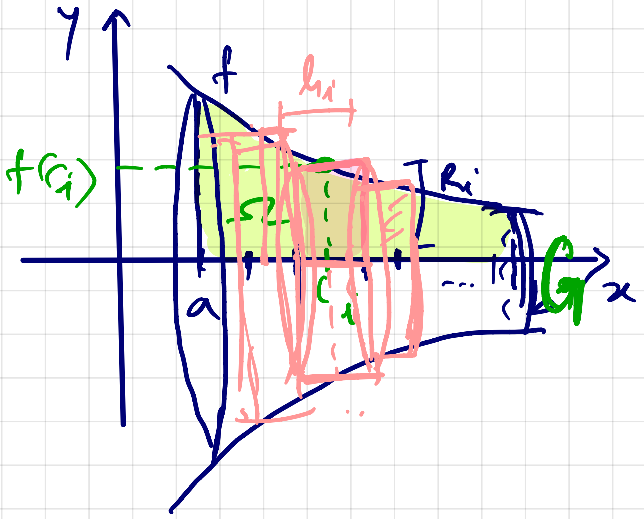
Disso, $V_i = Ab. l_i =$

$$= \pi . R_i^2 . l_i = \pi [f(c_i)]^2 . \Delta t_i \, ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Somando o volume de todos os n discos, vamos obter uma aproximação do volume V do sólido S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi . [f(c_i)]^2 \Delta t_i = \pi . \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta t_i \, ;$$



que é uma soma de Riemann. Então, o volume V do sólido S será dado por:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} V_i =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \pi . \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 . \Delta t_i$$

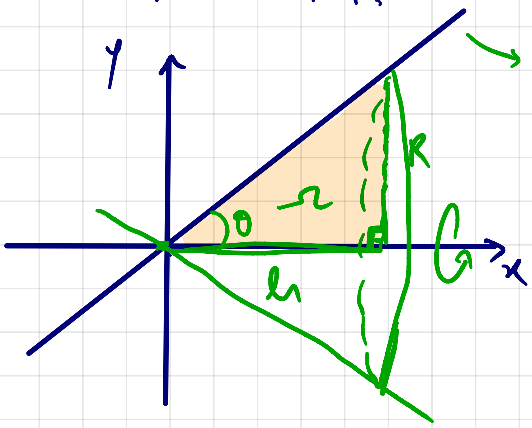
$$= \pi . \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ou seja, mostramos que, pelo método do disco, o volume V do sólido S em $[a,b]$ será dado por

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

EXEMPLOS: 01) Use o método do disco para deduzir a fórmula do volume de um cone de revolução, de raio da base R e altura h.

SOLUÇÃO: Para obter um cone de revolução como pedido, precisamos girar um triângulo retângulo, em torno de um de seus catetos.



→ reta de equação: $Y = \alpha x + 0$

$$\alpha = \tan\theta = \frac{R}{h}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{R}{h} \cdot x$$

$$f : [0, h] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{R}{h} \cdot x$$

Assim, a medida do volume V do sólido de revolução (cone) será:

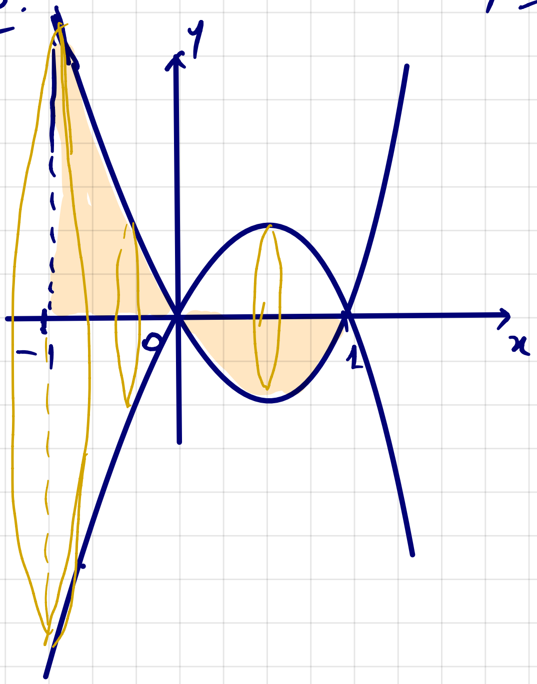
$$V = \pi \cdot \int_0^h [f(x)]^2\, dx = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{R}{h} x\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2\, dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h =$$

$$= \pi \frac{R^2}{\cancel{h^2}} \cdot \left(\frac{h^{\cancel{3}}}{3} - 0\right) = \frac{\pi \cdot R^2 h}{3}$$

02) Encontre o volume V do sólido S obtido ao girar $y = x^2 - x$ em torno do eixo Ox, no intervalo $[-1, 1]$.

Solução:



$y = x^2 - x$.

zeros:

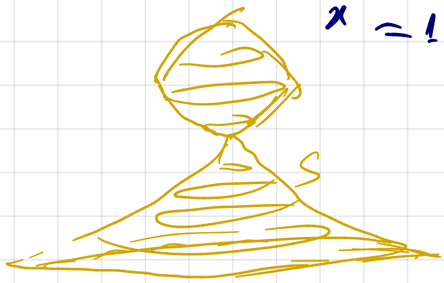
$y = 0$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0$

$x = 1$



$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (x^2 - x)^2 dx =$$

$$\pi \cdot \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} =$$

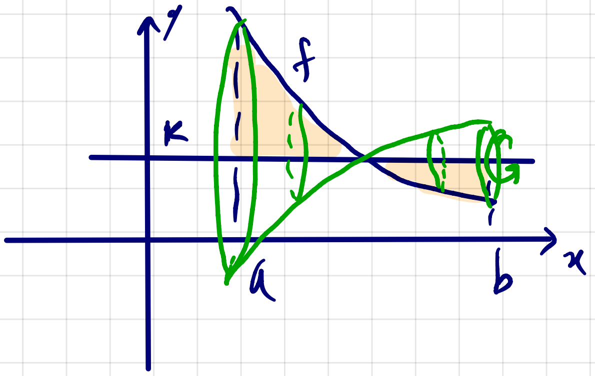
$$\pi \cdot \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{5} - \left(+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \right) \right] =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cancel{- \frac{1}{2}} \cancel{+ \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \pi \cdot \left[\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right]$$

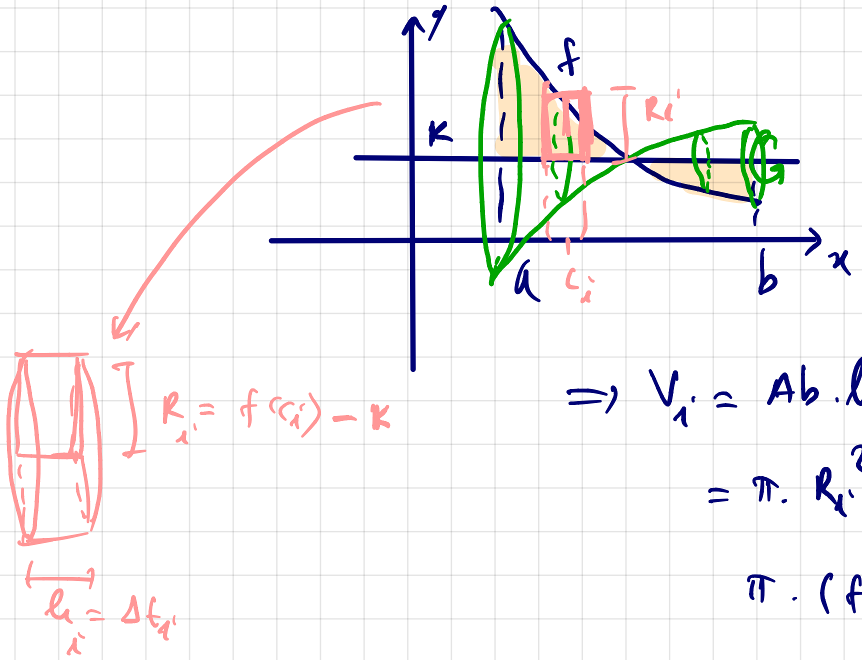
$$= \pi \cdot \frac{6 + 10}{15} = \frac{16\pi}{15} \text{ unidades de volume} = \frac{16\pi}{15} \text{ u.v.}$$

VOLUME DE SÓLIDO, PELO MÉTODO DO DISCO, COM EIXO DE ROTAÇÃO SENDO UMA RETA $y = k$ (PARALELA AO EIXO Ox).

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $y = k$.
Vamos obter o volume do sólido S obtido ao girar a região entre gráfico de f e a reta $y = k$.



Para isso, vamos observar um retângulo elementar, feita uma partição P de $[a,b]$:



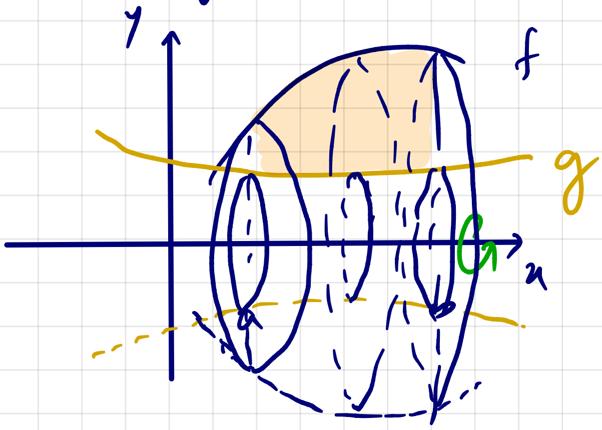
$$\Rightarrow V_i = Ab \cdot h_i$$
$$= \pi \cdot R_i^2 \cdot h_i$$
$$\pi \cdot (f(c_i) - k)^2 \cdot \Delta t_i$$

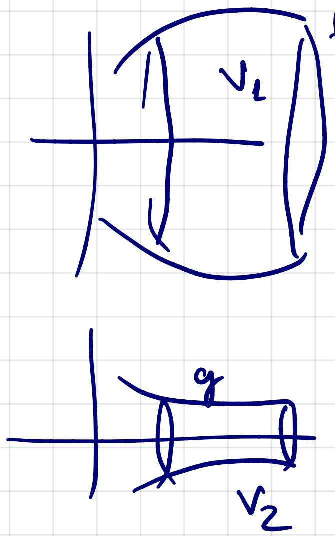
Portanto, o volume V será:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n \to \infty} \pi \cdot (f(c_i) - k)^2 \cdot \Delta t_i =$$

$$\Rightarrow V = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - k)^2 \, dx$$

Quando o sólido S é formado por Ω, delimitada por duas funções f e g. em $[a,b]$:





$$V = V_1 - V_2$$

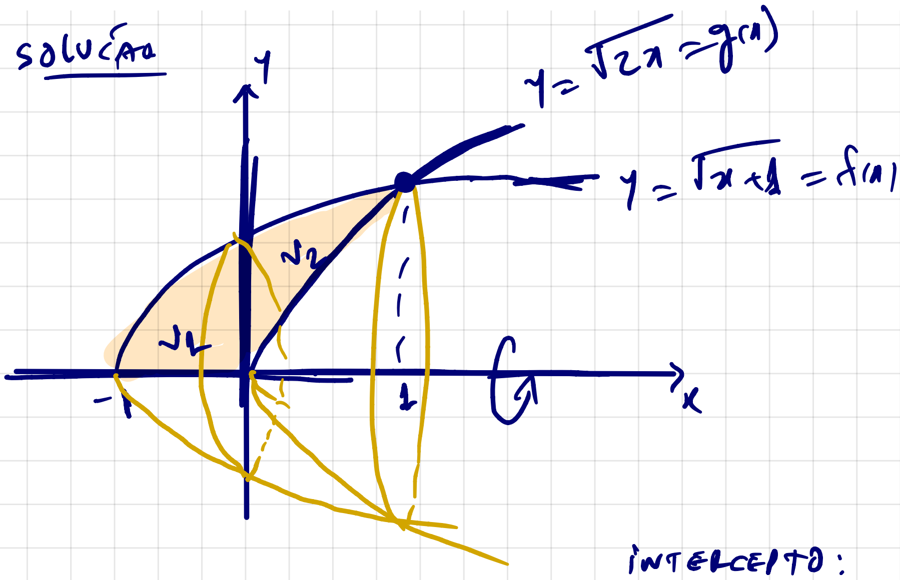
$$= \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx - \pi \cdot \int_a^b [g(x)]^2 \, dx =$$

$$= \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx$$

EXEMPLO: (Lista antiga)

Obtenha o volume do sólido S obtido ao se girar a região limitada por $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{2x}$ e $y = 0$ em torno do eixo x.

SOLUÇÃO



$y = \sqrt{x+1} \iff y^2 = x+1$

$x = y^2 - 1$

$y = \sqrt{2x}$

$\Updownarrow$

$y^2 = 2x$

$x = \frac{y^2}{2}$

INTERCEPTO:

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$$

$$2x = x + 1$$

$$x = 1$$

$$V = V_1 + V_2 = \pi \cdot \int_{-1}^{0} [f(x)]^2 dx + \pi \cdot \int_{0}^{1} (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{0} (\cancel{\sqrt{x+1}})^{\cancel{2}} dx + \pi \cdot \int_{0}^{1} \left[(\cancel{\sqrt{x+1}})^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{2x}})^{\cancel{2}}\right] \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{0} (x+1) dx + \pi \cdot \int_{0}^{1} (x+1-2x) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{0} (x+1) dx + \pi \cdot \int_{0}^{1} (1-x) dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \pi \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \pi \cdot \left(0 - \left[\frac{(-1)^2}{2} - 1\right]\right) + \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= \pi \cdot \left[\cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+1} + 1 \cancel{-\frac{1}{2}}\right] = \pi \text{ unidades de volume}$$