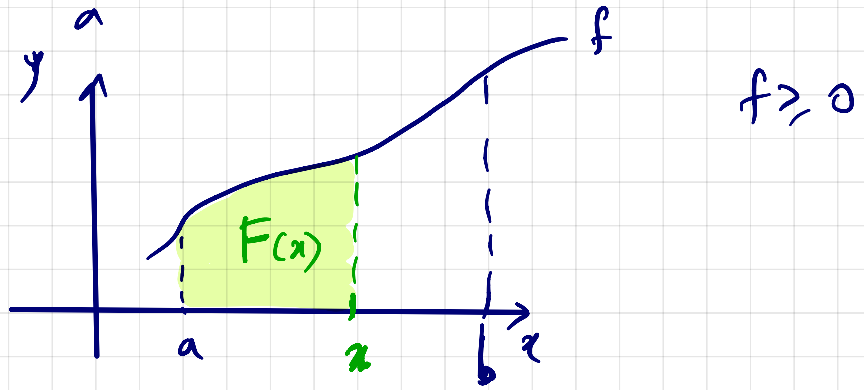
CÁLCULO 2

20/02/24 — AULA 17

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA:

ÁREA: Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável, já sabemos de nossos estudos que, sendo $f\geq 0$ em $[a,b]$, então $\int_a^b f$ representa a área abaixo do gráfico de f, no eixo Ox, no intervalo $[a,b]$. De fato, neste contexto estudamos o conceito de "função área" $F:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

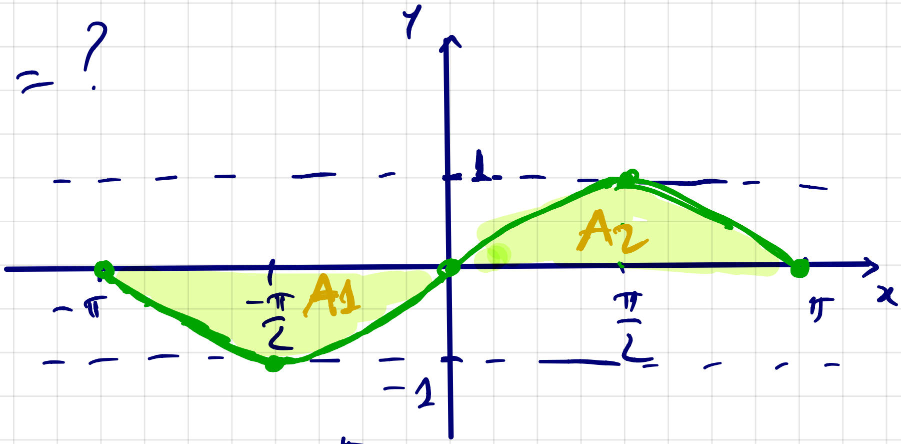


Veremos agora, como interpretar casos onde não se tem, necessariamente, $f\geq 0$ em $[a,b]$, ou seja, o gráfico de f pode estar com alguma parte abaixo do eixo Ox.

Neste caso, $\int_a^b f$ não representará a medida de área como descrito acima, pois a parte do gráfico abaixo do eixo horizontal forneceria uma "área negativa", o que desconteria no cálculo da integral definida.

Por exemplo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$$

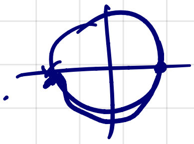


Visualmente, temos que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = A_1 + A_2$.

No entanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - (-\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1})$$

$$= -(-1) - (-(-1)) = 1 - 1 = 0$$



Porém, a medida da área entre o gráfico do seno e o eixo ox no intervalo $[-\pi, \pi]$ será

$$A = 2.A_2 > 0, \quad \text{pois } A_1 = A_2 \text{ (em módulo)}$$

Como

$$A_2 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} =$$

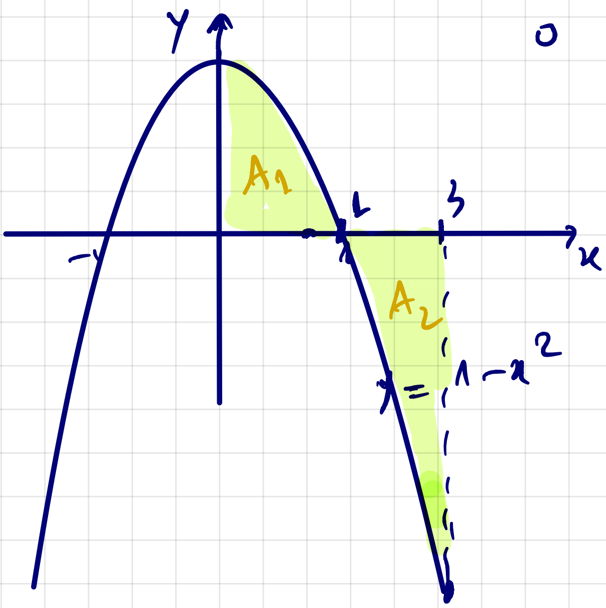
$$= -\cos(\pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1)$$

$= 1 + 1 = 2$ unidades de área.

Portanto,

$A = 2.A_2 = 2.2 = 4$ unidades de área (u.a.)

Outro exemplo: $\int_0^3 (1-x^2)\,dx$:



zeros:

$1-x^2=0$

$x=\sqrt{1}$

$x=\pm 1$

$$\int_0^3 (1-x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 3 - \frac{(3)^3}{3} - 0$$

$$= 3 - 9 = -6$$

Mas, qual seria a área que o gráfico de f forma com o eixo ox em [0,3]?

Neste caso, teremos que a medida da a área A será dada por:

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$\left(\begin{array}{c} A_1 > 0 \\ A_2 < 0 \end{array}\right)$

Então, teremos:

$A = |A_1| + |A_2|$, onde:

$$\bullet \quad A_1 = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \quad A_2 = \int_1^3 (1-x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3 = 3 - \frac{(3)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{3}} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 - 9 - 1 + \frac{1}{3}$$

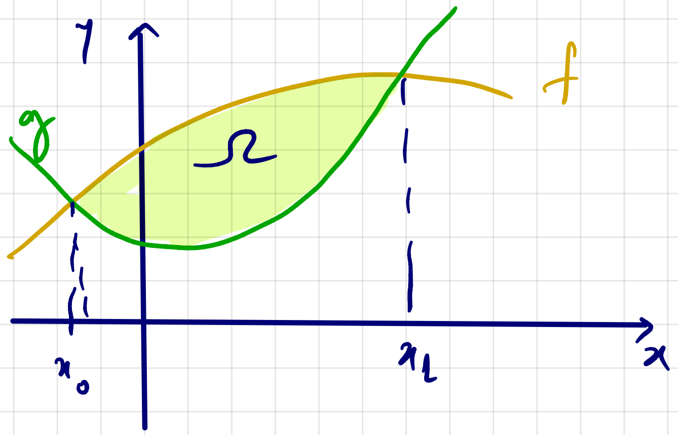
$$= -7 + \frac{1}{3} = \frac{-21+1}{3} = -\frac{20}{3}$$

Logo:

$$A = |A_1| + |A_2| = \frac{2}{3} + \left|-\frac{20}{3}\right|$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{22}{3} \text{ u.a.}$$

ÁREA ENTRE CURVAS: Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Assuma $f \geq g$ em $[a,b]$. Qual é a área entre os gráficos de f e g?

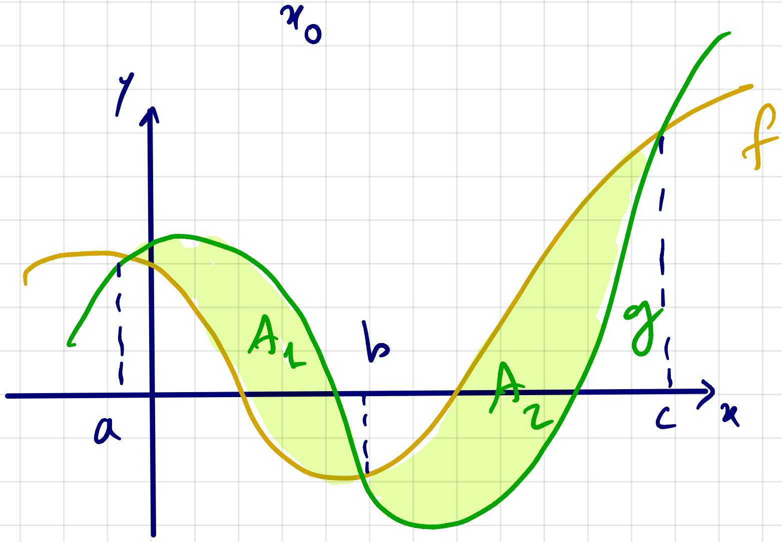


Ache x_0 e x_1, interseções entre f e g, obtidos quando $f(x) = g(x)$.

Então, a medida da área da região Ω será dada por

$$A = \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx.$$

DIFERENÇA ENTRE A MAIOR E A MENOR.



a, b, c : quando $f(x) = g(x)$.

Veja que por exemplo, A_1 possui parte da região abaixo do eixo ox. No entanto,

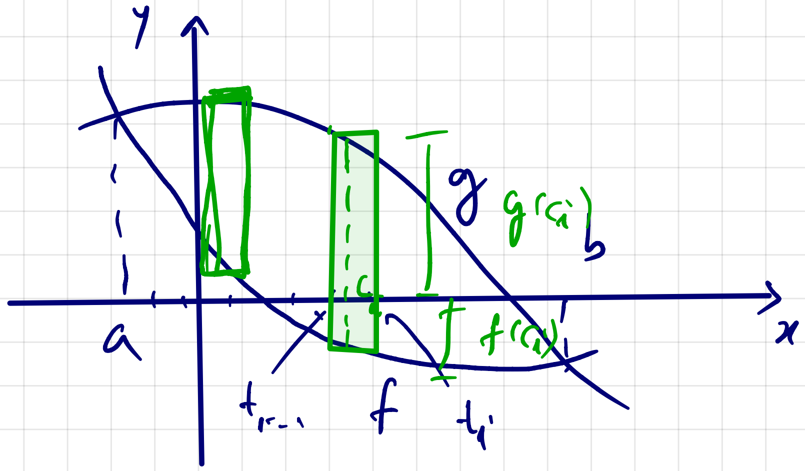
$$A_1 = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \,,$$ a diferença $g(x) - f(x)$ autocorrige o sinal da integral, deixando sempre POSITIVO.

e

$$A_2 = \int_b^c (f(x) - g(x))\,dx.$$

Disso a área A será: $A = |A_1| + |A_2|$

Vejamos mais a fundo a ideia da autocorreção do sinal comentado acima:



Sendo P uma partição de $[a,b]$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$$

A área A_i de um retângulo elementar será; tomando um ponto c_i qualquer no sub-intervalo $[t_{i-1}, t_i]$

$$A_i = (g(c_i) - f(c_i)) \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

Montando a soma de Riemann de f, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} [g(c_i) - f(c_i)] \Delta t_i$$

Passando o limite com $n \to \infty$, teremos

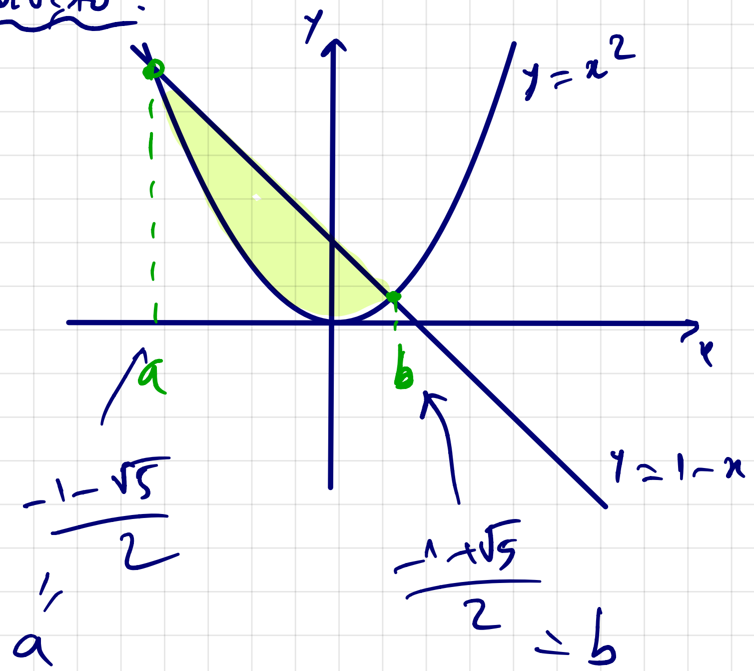
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (g(c_i) - f(c_i)) \cdot \Delta t_i$$

$$= \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

EXEMPLOS:

01) Encontrar a área formada pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1-x$.

SOLUÇÃO:



interceptos: $f(x) = g(x)$

$$x^2 = 1-x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

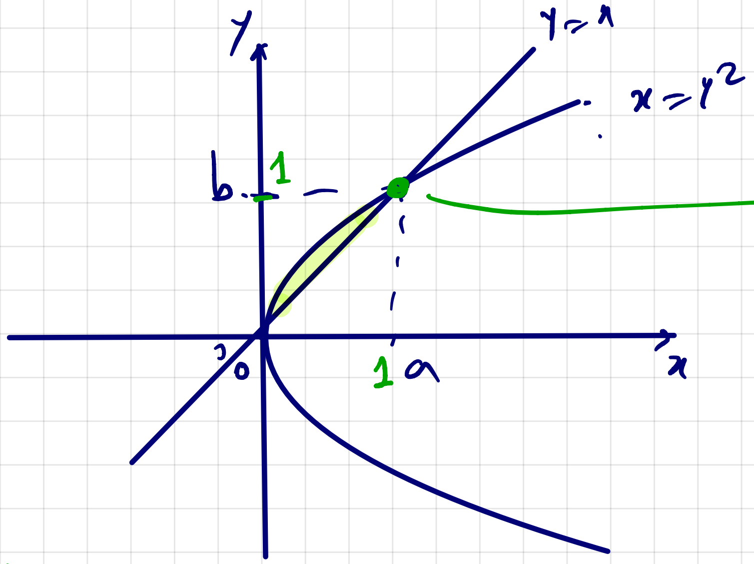
Então, teremos:

$$A = \int_a^b (1 - x - x^2)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b =$$

$$\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \text{exercício.}$$

02) Encontre a área entre as curvas $x = y^2$ e $y = x$.

Solução:



INTERCEPTO:

$x = x$

$y^2 = y$

$y^2 - y = 0$

$y(y-1) = 0$

$y = 0$

$y = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ \downarrow \\ x = 1 \end{array} \right.$

$$A = \int_0^{a\,(1)} (\sqrt{x} - x)\,dx \quad \text{ou} \quad A = \int_0^{1\,b} (y - y^2)\,dy$$

1.º CASO:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x)\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^1 x\,dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

2.º CASO:

$$A = \int_0^1 (y - y^2)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} \text{ u.a}$$