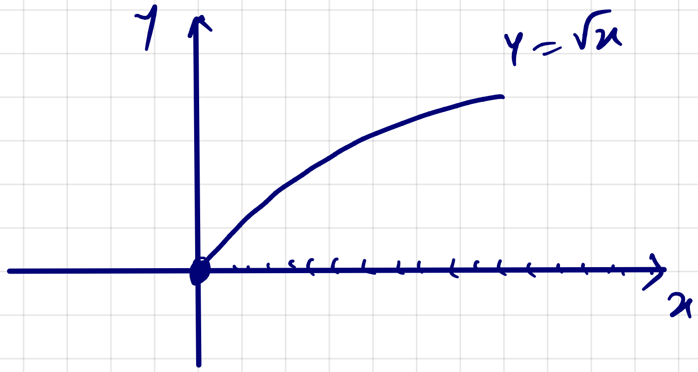
CÁLCULO 2

15/02/24 – AULA 16

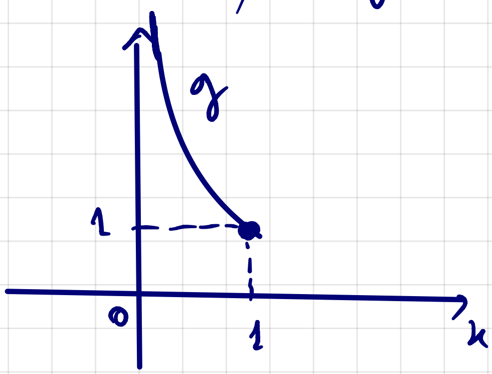
INTEGRAIS IMPRÓPRIAS:

Vamos considerar funções definidas em intervalos ilimitados e, também em intervalos limitados, mas que a função não está definida em algum ponto neste intervalo, podendo ser uma das extremidades. Tal ponto onde f não está definida chama-se uma SINGULARIDADE de f.

Ex: 01) $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$.



02) $g: (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.



Já vimos que, se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f$ representa, geometricamente, a área do gráfico formado por f no intervalo $[a, b]$.

Neste contexto, exploraremos se existe $\int_a^b f$ nos casos $\underline{01}$ e $\underline{02}$ como acima.

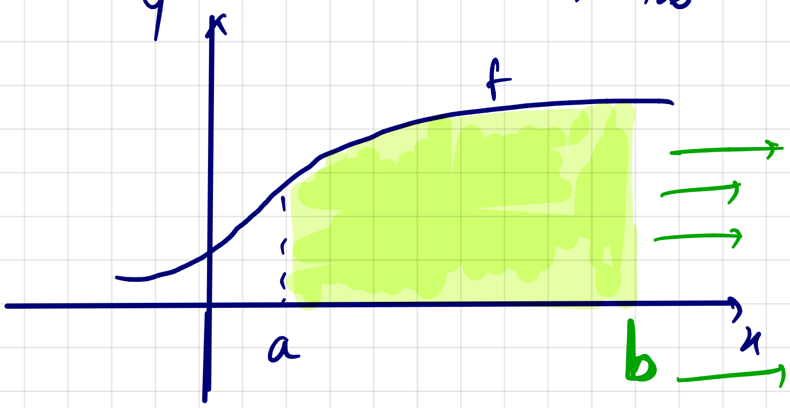
Estes casos de cálculo de $\int_a^b f$ com ou um dos limites de integração infinito, ou f com uma singularidade dentro do intervalo de integração, chamam-se de <u>INTEGRAIS IMPRÓPRIAS</u>.

Conforme introduzido acima as integrais impróprias são classificadas em 2 tipos:

(a) INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE $1^{\underline{a}}$ ESPÉCIE: Quando o intervalo de integração é ilimitado.

Por exemplo, se temos $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, então, a priori, não poderíamos calcular

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f$$

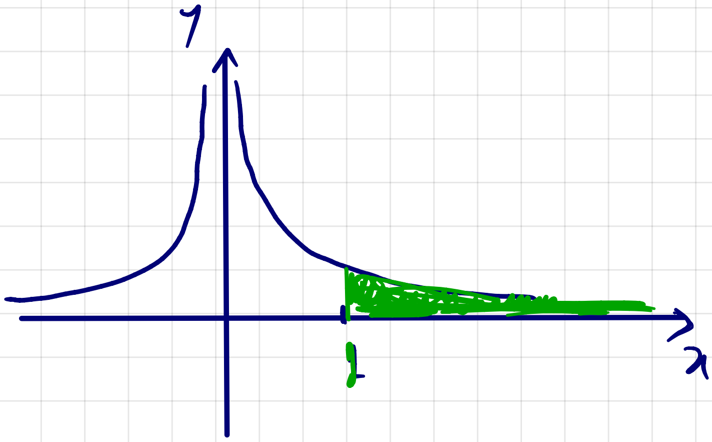


$b \to +\infty$

Se o limite existir diremos que a integral acima é convergente, e converge para o valor real obtido. Do contrário, a integral é dito divergente.

EXEMPLOS:

01) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = ?$



$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{b}}_{\to 0} + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

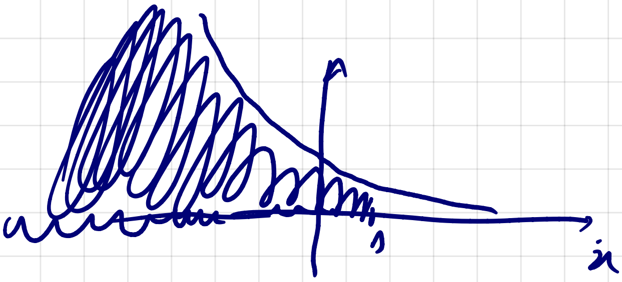
, i.e., a integral é convergente.

02) $\int_{-\infty}^{1} e^{-x} \cdot dx = ?$

• $\int e^{-x} dx = \int e^{r} \cdot (-dr) = -\int e^{r} dr = -e^{r} + C$

$\boxed{r = -x \Rightarrow dr = -dx \qquad dx = -dr}$

$= -e^{-x} + C$



Assim:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{-x} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{1} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{a}^{1} = \lim_{a \to -\infty} \left(-e^{-1} + e^{-a}\right)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{e} + e^{-a}\right) = -\frac{1}{e} + e^{-(-\infty)}$$

$$= -\frac{1}{e} + e^{+\infty} = +\infty$$

Logo, esta integral é divergente.

03) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

1º: f tem singularidade?

$x^2+2x+5=0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{1-20}}{2} \notin \mathbb{R}$

Logo, f não tem singularidade.

Neste caso, a saída é fazer, observando que f não possui singularidades em $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{+\infty} f \quad , \text{ e disso:}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

• $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+(2)^2} = \int \frac{dm}{m^2+a^2} =$

$x^2+2x+5 = (x^2+2x+1) + 4 = (x+1)^2 + 4$

$m = x+1$

$dm = dx$.

$$= \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

Disso, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\Big|_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\Big|_0^b$$

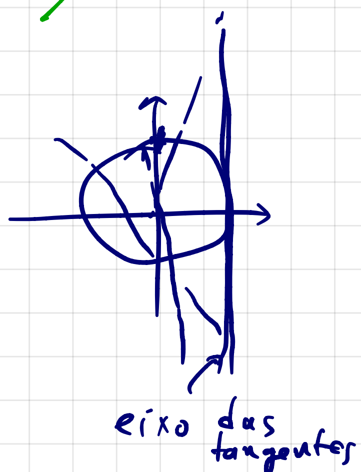
$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a+1}{2}\right) +$$

$$+ \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} \arctan\left(\frac{a+1}{2}\right) +$$

$$+ \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b+1}{2}\right) - \cancel{\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \arctan(-\infty) + \frac{1}{2} \cdot \arctan(+\infty)$$



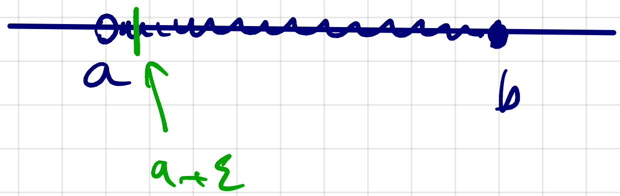
$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Logo, a integral é convergente e converge para $\frac{\pi}{2}$, i.e.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}$$

(b) INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE 2ª ESPÉCIE: Quando f possui uma singularidade no seu domínio.

Por exemplo, digamos que $f: (a, b] \to \mathbb{R}$, e $\nexists f(a)$.



Neste caso, tome $\varepsilon > 0$ e calcule $\int_{a+\varepsilon}^{b} f$.

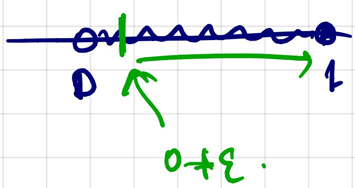
Assim:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f$$

EXEMPLOS:

01) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = ?$

Note que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não está definida em $x = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos:



$$\int_0^1 f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 f$$

- $$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Assim:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

Logo, a integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty$, i.e., é divergente.

---

02) $$\int_0^1 \frac{dx}{2x-1}$$

- $$\int \frac{dx}{2x-1} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

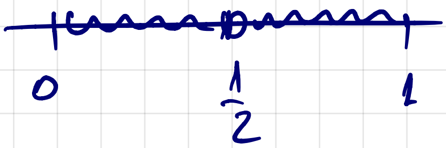
$$= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$$

$u = 2x-1.$

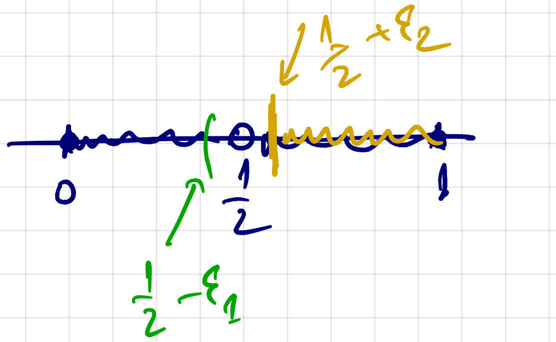
$\Rightarrow du = 2dx$

$\hookrightarrow dx = \frac{du}{2}$

singularidade de f: $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$



$$\Rightarrow \int_0^1 f = \int_0^{\frac{1}{2}} f + \int_{\frac{1}{2}}^1 f \,.$$



Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Então:

$$\int_0^1 f = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} f + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}^1 f =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}\ln\left|\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}-\varepsilon_1\right)-1\right| \overbrace{-\frac{1}{2}\ln|-1|}^{=0} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\underbrace{\frac{1}{2}\ln|1|}_{=0} - \frac{1}{2}\ln\left|\cancel{2}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}+\varepsilon_2\right)-1\right|$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}\ln|\cancel{1}-2\varepsilon_1\cancel{-1}| - \frac{1}{2}\ln|\cancel{1}+2\varepsilon_2\cancel{-1}|$$

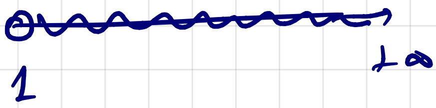
$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}\underbrace{\ln(\underbrace{2\varepsilon_1}_{0})}_{\infty} - \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\frac{1}{2}\underbrace{\ln(\underbrace{2\varepsilon_2}_{0})}_{\infty} = \infty-\infty$$

('INDET.')

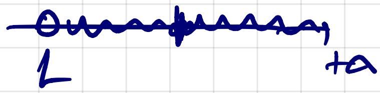
(diverge.)

03) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = ?$

$x = 1$ é singularidade de f pois $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.



$\displaystyle\int_1^{+\infty} f = ?$ Dado $\varepsilon > 0$, temos:



$$\int_1^{+\infty} f = \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{a} f}_{(\mathrm{II})} + \underbrace{\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f}_{(\mathrm{I})}, \quad a > 1.$$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$$

Disso, temos:

(I) $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)\Big|_a^b =$

$$= \lim_{b \to +\infty} \ln\left|b + \sqrt{b^2-1}\right| - \ln\left|a + \sqrt{a^2-1}\right|$$

$$= \ln(+\infty + \infty) - \ln\left|a + \sqrt{a^2-1}\right| = \underline{\underline{+\infty}}$$

(II) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{a} f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{a} =$

$$= \ln\left|a+\sqrt{a^2-1}\right| + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln\left|\underbrace{1+\varepsilon}_{\downarrow 0} + \sqrt{(\underbrace{1+\varepsilon}_{\downarrow})^2-1}\right|$$

$$= \ln\left|a+\sqrt{a^2-1}\right| + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\ln|1|}_{=0} =$$

$$= \ln\left|a+\sqrt{a^2-1}\right|$$

Portanto:

$$\int_1^{+\infty} f = (\mathrm{II}) + (\mathrm{I}) = \ln\left|a+\sqrt{a^2-1}\right| + \infty = +\infty$$

Ou seja, a integral dada diverge.