CÁLCULO 2

29/02/24 – AULA 20

No final da aula passada estudamos o cálculo do comprimento de arco de uma curva. Sendo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável e derivável em (a,b), então, a medida l do comprimento do arco formado pelo gráfico de f em $[a,b]$, é dado por:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Vejamos mais um exemplo:

(3) $f(x) = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, onde $0 \le a \le x \le b$. Qual o comprimento l?

Solução: Primeiramente, usando da propriedade dos logaritmos, escrevemos:

$$f(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1} = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)$$

$$\ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln\alpha - \ln\beta$$

Disso, derivando em x, obtemos:

$$(\ln v)' = \frac{v'}{v}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}} - e^x}{(e^x)^2 - 1^2} = \frac{-2 \cdot e^x}{e^{2x}-1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}}$$

Daí, obtemos:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{4 \cdot e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\, dx = \int_a^b \sqrt{\frac{(e^{2x}-1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\, dx$$

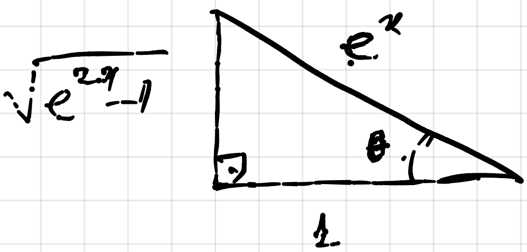
$$= \int_a^b \cancel{\sqrt{}} \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^{\cancel{2}}}\, dx = \int_a^b \frac{\sqrt{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}}{e^{2x}-1}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{\sqrt{(e^{2x}+1)^{\cancel{2}}}}{e^{2x}-1}\, dx = \int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{e^{2x} - 1 + 2}{e^{2x} - 1}\, dx = \int_a^b \left(\cancel{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1}} + \frac{2}{e^{2x} - 1} \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} \right) dx = \int_a^b dx + 2 \underbrace{\int_a^b \frac{dx}{e^{2x} - 1}}_{(*)}$$

$(*)$ $$\int \frac{dx}{e^{2x} - 1} = \int \frac{dx}{(e^x)^2 - 1^2}$$



$$\cos\theta = \frac{1}{e^x}$$

$$e^x = \sec\theta.$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{1}$$

$$\tan\theta = \sqrt{e^{2x} - 1}$$

$$\boxed{e^{2x} - 1 = \tan^2\theta.}$$

$$e^x . dx = \sec\theta . \tan\theta\, d\theta$$

$$dx = \frac{\sec\theta . \tan\theta\, d\theta}{e^x}$$

$$dx = \frac{\cancel{\sec\theta} . \tan\theta\, d\theta}{\cancel{\sec\theta}}$$

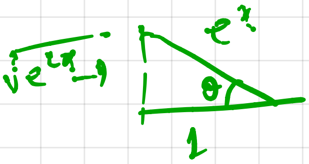
$$\boxed{dx = \tan\theta\, d\theta}$$

Disso, obtemos:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 1} = \int \frac{\cancel{\tan\theta}\, d\theta}{\tan^{\cancel{2}}\theta} = \int \frac{d\theta}{\tan\theta} = \int \cot\theta\, d\theta =$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta\, d\theta$$



$$= \ln|\sin\theta| + C$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^x}$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^x}\right| + C = \ln \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^x} + C$$

$$= \ln\sqrt{e^{2x}-1} - \ln e^x + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^{2x}-1) - x + C$$

Com isso, obtemos:

$$l = \int_a^b dx + \int_a^b \frac{dx}{e^{2x}-1} = \left.\cancel{x} + \frac{1}{2}\ln(e^{2x}-1) - \cancel{x}\right|_a^b$$

$$= \left.\frac{1}{2} \ln(e^{2x}-1)\right|_a^b = \frac{1}{2}\ln(e^{2b}-1) - \frac{1}{2}\ln(e^{2a}-1)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right)$$

SEQUÊNCIAS E SÉRIES:

Def.: Uma sequência numérica (x_n) é uma lista infinita de números reais

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots),$$

onde x_i são os termos da sequência, onde $i \in \mathbb{N}$.

(Aqui, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$)

Ex.: (x_n) a sequência definida por

$$x_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Neste caso, temos:

$$x_1 = \frac{1}{2.1+1} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2.2+1} = \frac{1}{5}$$

$$x_3 = \frac{1}{2.3+1} = \frac{1}{7}$$

$$\vdots$$

Ou seja, temos a seguinte lista infinita (i.e., sequência):

$$(x_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \dots\right)$$

Uma sequência (x_n) também pode ser pensada como sendo uma função $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto x(n) := x_n \, ;$$

é variável natural.

Def.: Dizemos que uma sequência (x_n) é crescente se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$

[ou seja, o próximo termo da seq. é maior ou igual ao anterior]

Ex: (x_n) a seq. dada por $x_n = n$

Então, $x_{n+1} = n+1 \geq n = x_n$

$\Rightarrow x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

A saber: $(x_n) = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

Def.: Dizemos que uma seq. (x_n) é decrescente se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1}$.

Ex.: $x_n = \frac{1}{2n+1}$.

Note que $2n+1 \leq 2(n+1)+1$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{x_n} \geq \underbrace{\frac{1}{2(n+1)+1}}_{x_{n+1}} \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}.$$

TOMANDO OS INVERSOS

Logo (x_n) é decrescente.

Obs.: Quando a desigualdade for estrita, ou seja, $<$ ou $>$, então,

- $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \Rightarrow$ a seq. é crescente estritamente
- $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \Rightarrow$ a seq. é decrescente estritamente.

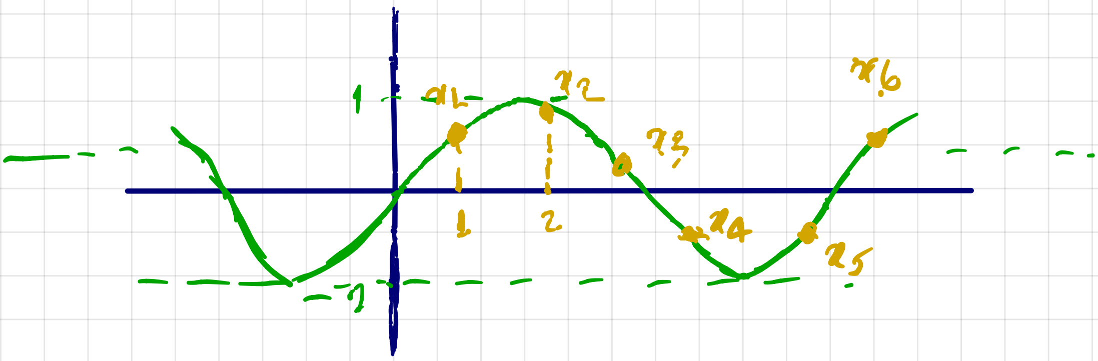
Def.: Quando uma sequência (x_n) for crescente (estritamente ou não) ou decrescente (estritamente ou não), ela é dita MONÓTONA.

É importante definir isso pois há sequências que não são nem crescentes e nem decrescentes

Ex.: 01) (x_n) a seq. dada por $x_n = (-1)^n$.

Neste caso, $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

02) $x_n = \text{sen}\, n$.



Estes 2 exemplos são de sequências não monótonas

Def.: Dizemos que uma sequência (x_n) é LIMITADA se $\exists\, K>0$ tal que $|x_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Os dois exemplos dados acima são de sequências limitadas:

01): $x_n = (-1)^n$. $|x_n| = 1 \leq 1$,

02) $x_n = \operatorname{sen} n$. $|x_n| = |\operatorname{sen} n| \leq 1$.

LIMITES DE SEQUÊNCIAS:

Dada uma sequência (x_n), perguntamos: à medida em que avançamos na lista infinita, o termo x_n vai se estabilizando (ou seja, se aproximando) de um valor real, ou "explode" ao infinito, ou não existe?

Ou seja, num processo de limite, para quanto vai x_n quando n tende ao infinito? Estas observações inspiram definir o conceito de limite de sequência.

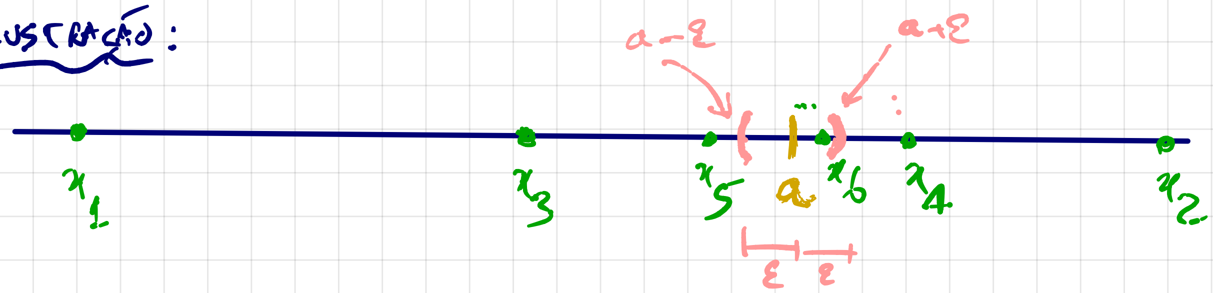
Def: Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o limite da sequência (x_n) quando n tende ao infinito, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que}, \ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

ILUSTRAÇÃO:



$n_0 = 6$ é tal que,
$\forall n \geq 6 = n_0$
$|x_n - a| < \varepsilon$
$\uparrow$
DISTÂNCIA DO TERMO x_n AO PONTO a, FICA A MENOS DE $\varepsilon > 0$, $\forall n \geq n_0 = 6$.

Note que:

$|x_n - a| < \varepsilon \iff$

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad +a$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$

ou seja, a partir de n_0, todos os termos da seq. (x_n) ficam no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Ex: $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$. $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = ?$

Af: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) tal que, $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - 0| < \varepsilon$.

Vamos analisar $|x_n - 0|$:

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{2n+1} - 0\right| = \frac{1}{2n+1}.$$

Note que $2n+1 > 2n \Rightarrow \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{2n}$

Então, $\forall n \geq n_0$; $2n \geq 2n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{2n_0}$

$$\Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n_0} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n_0} < 2\varepsilon$$

$$n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Ou seja, basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

Isso mostra que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$.

$\square$

De fato, tome $\varepsilon = 0{,}1 > 0$

Então, $n_0 > \dfrac{1}{2\varepsilon} = \dfrac{1}{2\cdot 0{,}1} = \dfrac{1}{0{,}2} = \dfrac{1}{\frac{2}{10}} = 5$

Tome $n_0 = 6 \in \mathbb{N}$.

Assim, $\forall n \geq 6 = n_0$, é GARANTIDO que

$$|x_n - 0| < 0,1 = \varepsilon.$$

EX: $n = 7 \geq n_0$: $|x_7 - 0| = \left| \frac{1}{2 \cdot 7 + 1} \right| =$

$$\frac{1}{15} \cong 0,0667 < 0,1 = \varepsilon.$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: Toda sequência convergente é limitada.

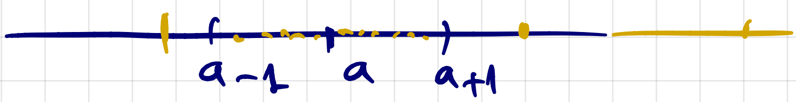
DEMONSTR.: Seja (x_n) uma seq. convergente, digamos que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Tome $\varepsilon = 1$. Então, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implica que $|x_n - a| < 1 = \varepsilon$, ou seja,

$$-1 < x_n - a < 1, \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad a - 1 < x_n < a + 1, \quad \forall n \geq n_0$$



Seja $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_{n_0 - 1}, a+1, a-1 \}$,

que é um conj. finito. Sendo finito, existem elementos mínimo e máximo.

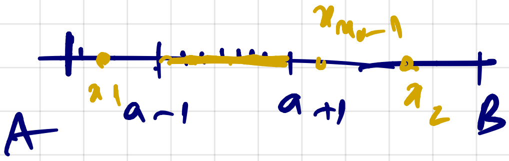
Sejam $A = \min X$ e

$B = \max X.$

Assim, teremos

$$a-1 < x_n < a+1, \quad \forall n \geq n_0 \text{ e}$$

$$A \leq x_n \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Logo, (x_n) é limitada $\square$

Obs.: A recíproca dessa proposição, em geral, é falsa. Ou seja, o fato de uma sequência (x_n) ser limitada, não implica em ser convergente.

Ex.: (x_n) dada por $x_n = (-1)^n$.

$$(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

(x_n) é limitada; $|x_n| \leq 1$, i.e., $-1 \leq x_n \leq 1$, $\forall n$.

Mas (x_n) não é convergente.