CÁLCULO 1.

30/01/24 – AULA 14

FUNÇÕES CONTÍNUAS.

Def.: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função definida num conj. $X \subseteq \mathbb{R}$, e seja $a \in X$. Dizemos que f é CONTÍNUA no ponto a se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$: $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Em palavras, uma função f é cont. em um ponto a se, e só se, qualquer outro ponto x muito próximo de a possuirá imagem $f(x)$ muito próximo de $f(a)$.

Quando o ponto $x = a$ for também um ponto de acumulação do conj. X (ou seja, quando existe uma seq. de pontos de X que converge para a, e por isso escrevemos $x \to a$), então a def. de continuidade acima assemelha-se ao conceito de limite, ou seja:

$$f \text{ é cont. em } x = a, \text{ com } a \text{ tal que } x \to a. \overset{\text{def.}}{\iff} \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

EXEMPLO: Verifique se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x > 2 \\ 3x^2 - 6x, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

é contínua em $x = 2$.

Solução: Vamos verificar se $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Para isto, vejamos:

(i) $f(2) = 3.(2)^2 - 6.2 = 12 - 12 = 0$

(ii) $\exists \lim_{x \to 2} f(x)$?

Para responder isso precisamos calcular os limites laterais.

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x^2 - 6x = 3.(2)^2 - 6.(2) = \underline{\underline{0}}$

- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4$

Como os limites laterais deram resultados desiguais, segue que $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$.

Neste caso nem precisamos verificar se $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, pois nem o limite existe.

EXEMPLO: Prove que $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x}$ é uma função contínua.

SOLUÇÃO: Usamos a def. de continuidade para provar.

Dado $a\in(-\infty,1)$ um ponto qualquer do domínio.

Dado $\varepsilon>0$. Precisamos encontrar $\delta>0$ [e este δ dependerá do ε escolhido e do ponto a], tal que, $\forall x\in(-\infty,1)$ tal que $|x-a|<\delta$, implique em $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Analisando $|f(x)-f(a)|$:

$$|f(x)-f(a)| = \left|\sqrt{1-x}-\sqrt{1-a}\right| = \left|\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-a}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}\right)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}}\right|$$

$$= \frac{|1-x-(1-a)|}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}} = \frac{|x-a|}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}} \leq \frac{\overbrace{|x-a|}^{<\delta}}{\sqrt{1-a}} <$$

tiramos o módulo do denominador pois $1-x>0$, $\forall x<1$.

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}\geq\sqrt{1-a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$$

$$< \frac{\delta}{\sqrt{1-a}} := \varepsilon.$$

Assim, basta tomar $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{1-a}$.

Logo, f é contínua no ponto a.

Pela arbitrariedade da escolha do ponto a em $(-\infty, 1)$, segue que f é contínua em todo o seu domínio. $\square$

Def.: Quando uma função f não for contínua em um ponto a do seu domínio, diremos que f é <u>DESCONTÍNUA</u> no referido ponto.

Uma descontinuidade pode ser classificada em:

- DESCONTINUIDADE DE 1ª ESPÉCIE ou REMOVÍVEL: quando $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, mas é diferente de $f(a)$.

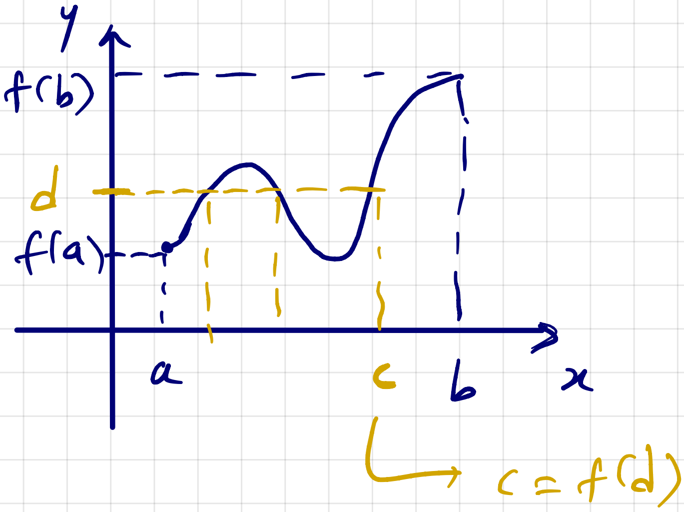
- DESCONTINUIDADE ESSENCIAL ou DE SEGUNDA ESPÉCIE: quando $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$. O exemplo dado na pág. 2 é de descontinuidade de 2ª ESPÉCIE.

FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS:

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (T.V.I) Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Se $f(a) < d < f(b)$, então $\exists\, c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = d.$$

Ou seja, sendo cont. num intervalo, então qualquer número real entre duas imagens será imagem de algum domínio mediante f.



A demonstração desse teorema foge de um curso de cálculo.

Vejamos um exemplo de aplicação:

Ex.: Mostre que a função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ possui uma raiz entre -1 e 1.

SOLUÇÃO: Note que $f(-1) = (-1)^5 - 3.(-1) + 2$

$$= -1 + 3 + 2 = 3 \text{ ; e}$$

$$f(1) = (1)^5 - 3.(1) + 1 =$$
$$= 1 - 3 + 1 = -1.$$

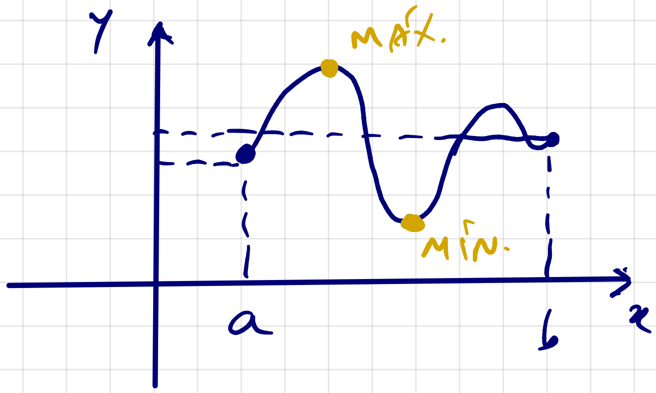
Então, temos

$$f(1) = -1 < 0 < 3 = f(-1);$$

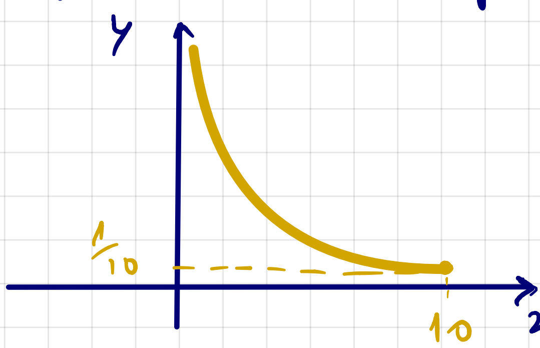
e como f é contínua, segue pelo T.V.I. que $\exists\, c$ entre -1 e 1 tal que $f(c) = 0$, ou seja, f possui um zero entre -1 e 1.

TEOREMA DO VALOR EXTREMO OU TEOR. DE WEIERSTRASS.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$, então f assume valores máximo e mínimo em $[a,b]$.



Obs.: Se o intervalo não for fechado o teorema pode ser falso. Por exemplo: $f : (0, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.



Neste caso, $\exists\, \text{mín} f = \frac{1}{10}$, mas $\nexists\, \text{máx.} f$.