CÁLCULO 1

29/02/24 – AULA 21

TAXAS RELACIONADAS.

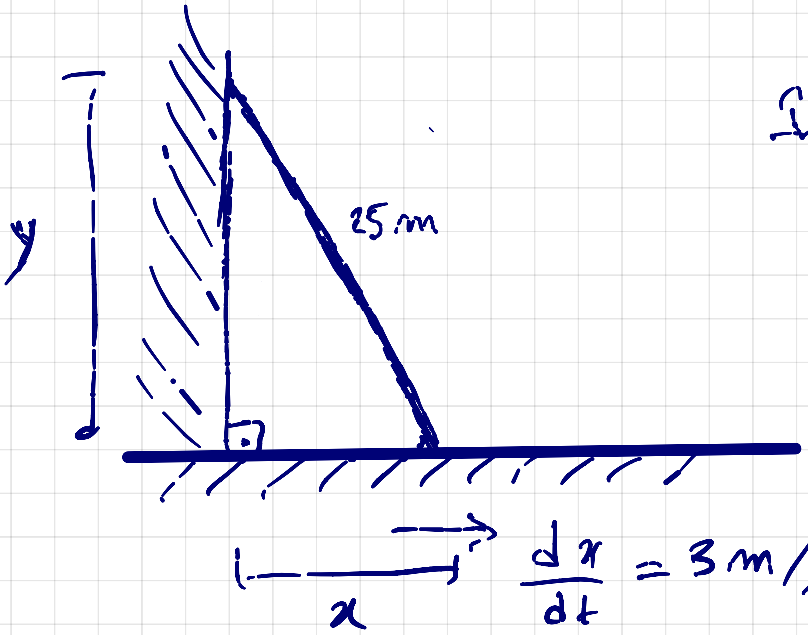
Dando um significado prático para a derivada, a mesma corresponde à taxa de variação instantânea. Por exemplo (e já vimos isso), dada a eq. de posição $s(t)$ de um móvel ao longo do tempo, a taxa de variação instantânea da posição em relação ao tempo fornece a eq. da eq. da velocidade, ou seja,

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = v(t)$$

Esta ideia de taxa de variação pode ser aplicada em diversos contextos, como nos exemplos a seguir:

01) Uma escada com 25 m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 m/s, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 m da parede?

SOLUÇÃO:



$$\frac{dx}{dt} = 3\,m/s$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=15m} = ?$$

$x = x(t)$
$y = y(t)$

Pelo T. de Pitágoras:

$$(25)^2 = x^2 + y^2$$

$$625 = x^2 + y^2$$

Derivando implicitamente, vem:

$$0 = 2x\cdot\frac{dx}{dt} + 2y\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$625 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{625 - y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{625-y^2}}{y}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=15} = -\frac{\sqrt{625-(15)^2}}{\cancel{15}_{\,5}}\cdot\cancel{3}^{\,1}$$

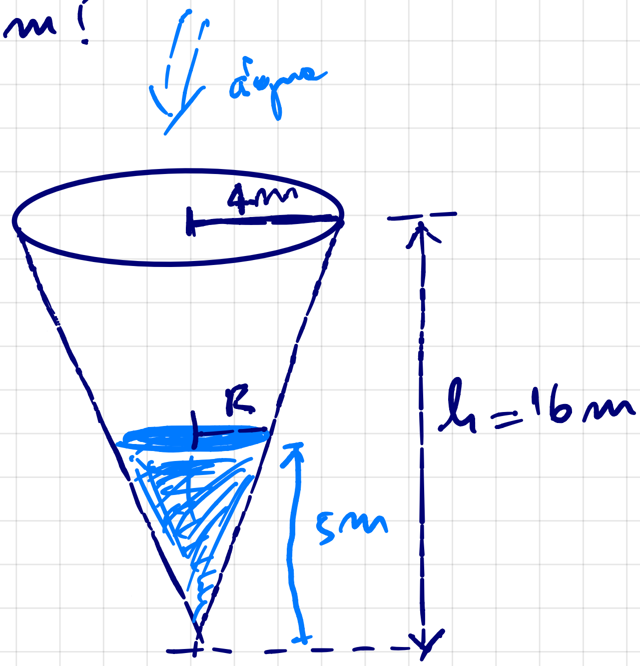
$$= -\frac{\sqrt{625-225}}{5} = -4\,m/s$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=15m} = -4\,m/s$$

→ pois y diminui-

02) Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16m de altura e uma base com 4m de raio. A água flui no tanque a uma taxa de $2m^3/min$. Com que velocidade o nível de água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

Solução:



$$\frac{dV}{dt} = +2m^3/min$$

(enchendo)

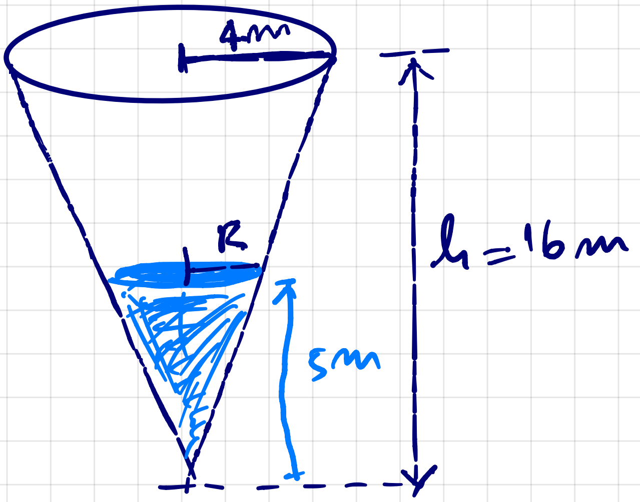
$$\boxed{\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5m} = ?}$$

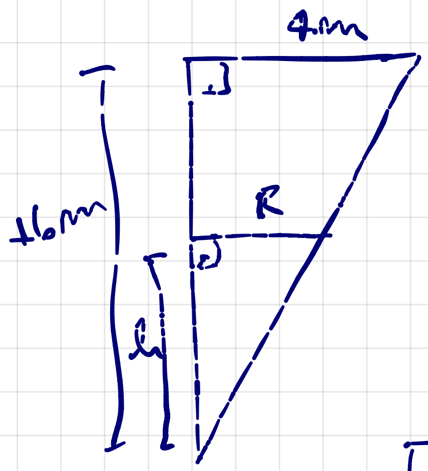
A medida do volume V do cone é dada por

$R = R(t)$

$h = h(t)$

$$V = \frac{Ab.h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} R^2 . h$$





semelhança de triângulos.

$$\frac{16}{4} = \frac{h}{R}$$

$$4 = \frac{h}{R}$$

$$\boxed{R = \frac{h}{4}}$$

Assim:

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{3 \cdot 16} \cdot h^3$$

$$V = \frac{\pi}{48} h^3 \quad ; \quad h = h(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16} \cdot h^2 \frac{dh}{dt}$$

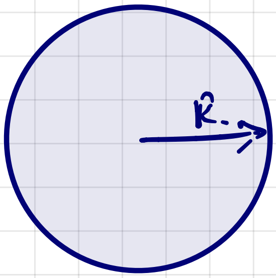
$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5m} = \frac{16}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(5)^2} \approx \frac{32}{25\pi} \ m/min.$$

LISTA 09:

1. Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresça a uma taxa de 8 cm^3/min. Ache a taxa segundo a qual o raio está crescendo quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro. (Resp. $\frac{1}{2\pi}$ cm/min).

SOLUÇÃO:



$$\frac{dV}{dt} = +8\ \text{cm}^3/\text{min}.$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right| = ?$$

$R = 2$ cm. $(D = 4)$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$ (volume da esfera de raio R)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} R^2 \cdot \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi R^2} = \frac{8}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=2\text{cm}} = \frac{8}{4\pi \cdot (2)^2} = \frac{8}{16\pi} = \frac{1}{2\pi}\ \text{cm/min}$$

5. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = c$, onde P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão, V é o número de unidades cúbicas do volume de gás e c é uma constante. Num certo instante, a pressão é 150 kg/m^2,o volume do gás é 1,5 m^3 e está crescendo a uma taxa de 1 m^3/min. Ache a taxa de variação da pressão nesse instante. (Resp. -100 kg/m^2/min).

Solução: $P \cdot V = c$

$P = 150 \ kg/m^2$

$V = 1{,}5 \ m^3$

$\frac{dV}{dt} = 1 \ m^3/min.$

$\left.\frac{dP}{dt}\right| = ?$

$$V = \frac{c}{P} = c \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = -c \cdot P^{-2} \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{c}{P^2} \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2 \cdot \frac{dV}{dt}}{c}$$

Em qual instante; quando $V = 1{,}5 \ m^3$

neste caso, teremos

$$P \cdot V = C$$

$$150 \cdot 1{,}5 = C \Rightarrow C = 225$$

Ou seja,

$$\left.\frac{dP}{dt}\right| = -\frac{(150)^2 \cdot 1}{225} = -100 \ \text{kg/m}^2/\text{min}$$

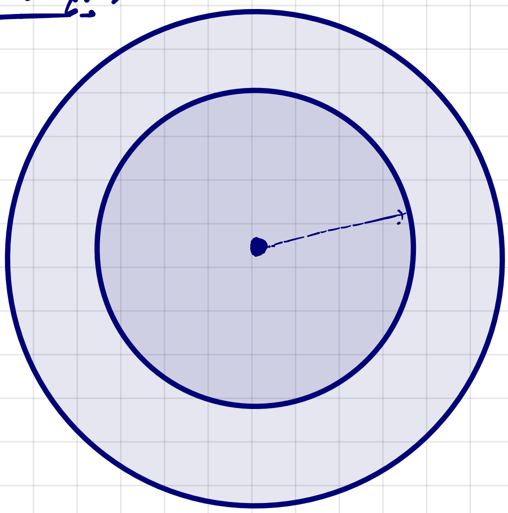
$C = 225$

$P = 150$

$\frac{dV}{dt} = 1$

6. Uma pedra cai livremente em um lago parado. Ondas circulares se espalham e o raio da região afetada aumenta a uma taxa de 16 cm/s. Qual a taxa segundo a qual a região está aumentando quando o raio for de 4 cm? (Resp. 128 π cm^2/s).

SOLUÇÃO:



$$\frac{dR}{dt} = 16 \text{cm/s}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{R=4\text{cm}} = ?$$

A área A é a área de um círculo. Então:

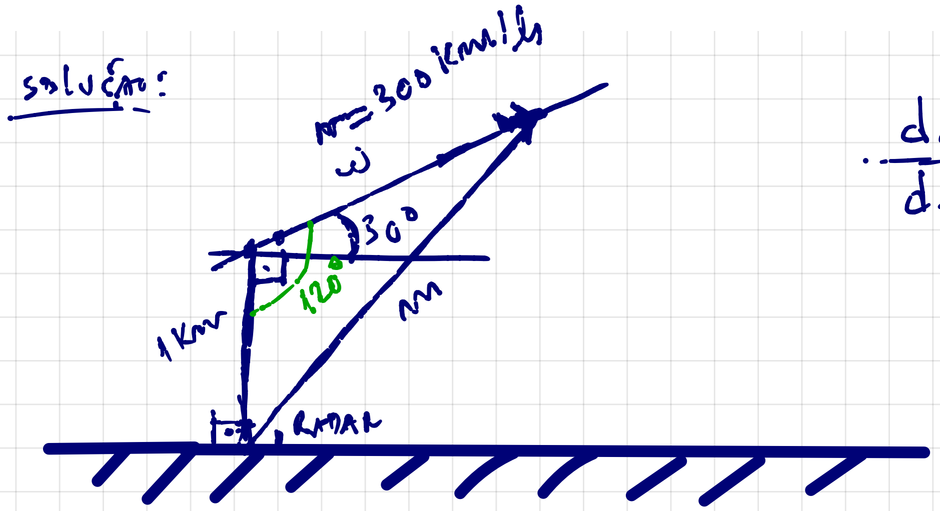
$$A = \pi R^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2R \cdot \frac{dR}{dt}$$

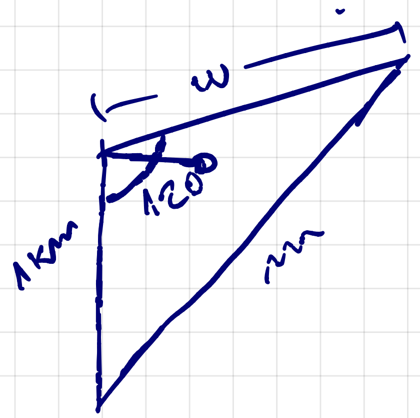
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{R=4cm} = \pi.2.4.16 = 128\pi \ cm^2/s$$

16. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30°. A que taxa está crescendo a distância do avião em relação ao radar após ter passado 1 minuto por ele? (Resp. $\frac{1650}{\sqrt{31}}$ km/h).

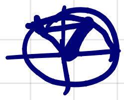
solução:



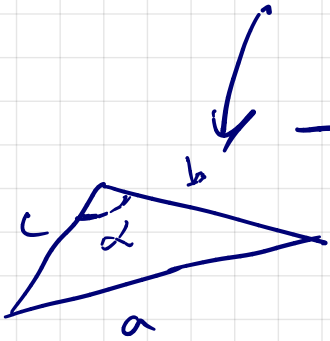
$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=1min.=\frac{1}{60}h.}$$



$$\frac{dw}{dt} = 300 \ km/h$$



Pela lei dos cossenos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha)$$

$$m^2 = 1^2 + w^2 - 2.1.w \cos(120°)$$

$$m = \sqrt{1 + w^2 - 2w.\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$m = \sqrt{1 + w^2 + w}$$

$$m = \sqrt{1 + w + w^2} = (1 + w + w^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}\cdot(1+w+w^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(\frac{dw}{dt} + 2\cdot w \cdot \frac{dw}{dt}\right)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\frac{dw}{dt} + 2w \cdot \frac{dw}{dt}}{2\sqrt{1+w+w^2}}$$

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=\frac{1}{60}h} = \frac{\frac{dw}{dt}(2w+1)}{2\sqrt{1+w+w^2}} =$$

neste caso, $\frac{dw}{dt} = 300 \text{ km/h}$;

$$t = \frac{1}{60} h \Rightarrow w = \frac{30 km}{h} \cdot \frac{1}{60} h$$

$$= 5 km.$$

$$= \frac{300 \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{2\sqrt{1+5+(5)^2}} = \frac{300 \cdot 11}{2\sqrt{31}}$$

$$= \frac{1650}{\sqrt{31}} \text{ km/h}.$$