CÁLCULO 1

22/02/24 – AULA 19

Seguindo o estudo de regras de derivação:

13) $\boxed{y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x \cdot x'}$

De fato:

$$y = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{u}{w}$$

$$y' = \left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{w \cdot u' - u \cdot w'}{w^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \Rightarrow u' = \cos x \cdot x' \\ w = \cos x \Rightarrow w' = -\operatorname{sen} x \cdot x' \end{array}\right.$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x \cdot x' - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x \cdot x')}{(\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x \cdot x' + \operatorname{sen}^2 x \cdot x'}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\overbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}^{1 =} \cdot x'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x'$$

$$= \sec^2 x \cdot x'.$$

Ex.: 01) $y = \tan(\underbrace{\ln x}_{v})$. $y' = ?$

$$y = \tan v \Rightarrow y' = \sec^2 v \cdot v'$$

$$v = \ln x = \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \sec^2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

02) $y = \tan(\underbrace{x^3 - 2x}_{v})$. $y' = ?$

$$v' = 3x^2 - 2$$

$$y' = \sec^2(x^3 - 2x) \cdot (3x^2 - 2)$$

$$y' = (3x^2 - 2) \cdot \sec^2(x^3 - 2x) .$$

14) $\boxed{y = \cot v \Rightarrow y' = -\csc^2 v \cdot v'}$

$$y = \cot v = \frac{\cos v}{\operatorname{sen} v}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\cos v}{\operatorname{sen} v}\right)' = \left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{w \cdot u' - u \cdot w'}{w^2};$$

onde:

$$\begin{cases} u = \cos r \Rightarrow u' = -\operatorname{sen} r \cdot r' \\ w = \operatorname{sen} r \Rightarrow w' = \cos r \cdot r' \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\operatorname{sen} r \cdot (-\operatorname{sen} r \cdot r') - \cos r \cdot \cos r \cdot r'}{(\operatorname{sen} r)^2}$$

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}^2 r \cdot r' - \cos^2 r \cdot r'}{\operatorname{sen}^2 r}$$

$$y' = -\frac{\overbrace{(\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r)}^{1=} \cdot r'}{\operatorname{sen}^2 r} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 r} \cdot r'$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -\csc^2 r \cdot r'}$$

Ex.: $y = \cot(\sqrt{x})$. $y' = ?$

$$r = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$(w^k)' = k\, w^{k-1} \cdot w'$$

$$\Rightarrow r' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Portanto, obtemos:

$$y' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$y' = -\csc^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \csc^2\sqrt{x}}$$

15) $\boxed{y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'}$

$$y = \sec u = \frac{1}{\cos u} = (\cos u)^{-1} = w^k, \quad k = -1.$$

$$(w^k)' = k \cdot w^{k-1} \cdot w'$$

Disso, segue que:

$$w = \cos u$$
$$\hookrightarrow w' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$\underline{y'} = \left[(\cos u)^{-1}\right]' ;$$

$$= -1 \cdot (\cos u)^{-2} \cdot (-\operatorname{sen} u \cdot u')$$

$$= +\frac{1}{\cos^2 u} \cdot \operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\cos u}}_{\sec u} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}}_{\tan u} \cdot u'$$

$$= \underline{\sec u \cdot \tan u \cdot u'}$$

Ex: $y = \sec(e^{2x} + x)$. $y' = ?$

$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$.

$u = e^{2x} + x \Rightarrow u' = e^{2x} \cdot 2 + 1$

$\Rightarrow u' = 2 \cdot e^{2x} + 1$

Disso, obtemos:

$y' = \sec(e^{2x} + x) \cdot \tan(e^{2x} + x) \cdot (2e^{2x} + 1)$

$y' = (2e^{2x} + 1) \cdot \sec(e^{2x} + x) \cdot \tan(e^{2x} + x)$

16) $\boxed{y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'}$

A demonstração é similar à anterior, e fica como um exercício.

UM EXERCÍCIO DE LISTA:

LISTA 07. 14 (k): (k) $f(x) = \sec\left(\underbrace{\ln\left(\frac{1-2x}{3x+1}\right)}_{u}\right)$. $f'(x) = ?$

$$y = \sec r \Rightarrow y' = \sec r \cdot \tan r \cdot r'$$

onde $r = \ln\left(\frac{1-2x}{3x+1}\right) = \ln(1-2x) - \ln(3x+1)$

$(\ln w)' = \frac{w'}{w}$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$r' = \frac{-2}{1-2x} - \frac{3}{3x+1} = \frac{-2(3x+1) - 3(1-2x)}{(1-2x)(3x+1)}$$

$$= \frac{-\cancel{6x} - 2 - 3 + \cancel{6x}}{(1-2x)(3x+1)} = \frac{-5}{(1-2x)(3x+1)}$$

Disso, obtemos:

$$y' = \sec r \cdot \tan r \cdot r'$$

$$= \sec\left(\frac{1-2x}{3x+1}\right) \cdot \tan\left(\frac{1-2x}{3x+1}\right) \cdot \left(\frac{-5}{(1-2x)(3x+1)}\right)$$

$$= \frac{-5}{(1-2x)(3x+1)} \sec\left(\frac{1-2x}{3x+1}\right) \cdot \tan\left(\frac{1-2x}{3x+1}\right).$$

Obs: (sobre o significado físico da derivada):

$s(t)$ eq. de posição.

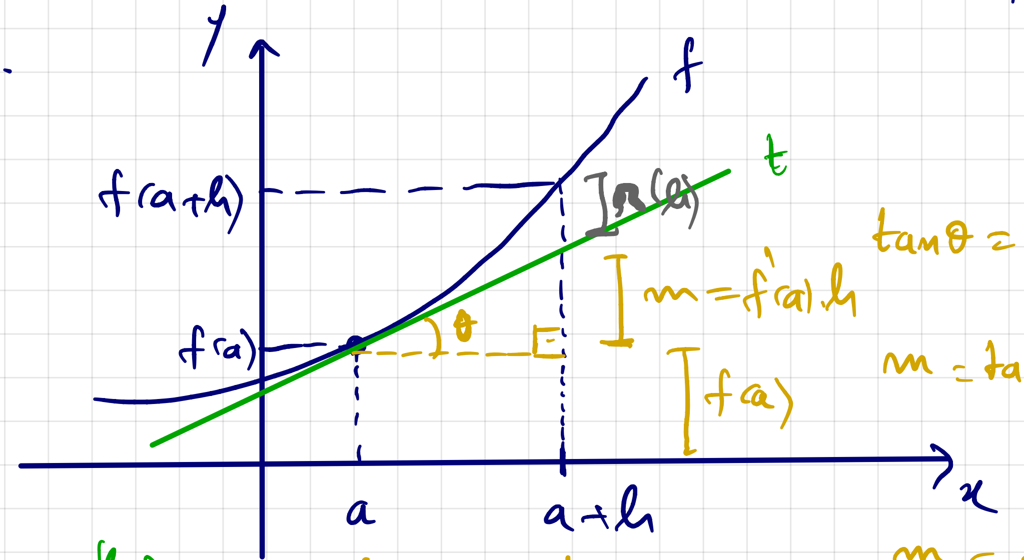
$v(t) = s'(t)$. – a eq. de velocidade é a derivada da eq. de posição (visto na aula)

$a(t)$: aceleração:

$a(t) = v'(t)$ – a eq. de aceleração é a derivada da eq. da velocidade.

A DERIVADA COMO APROXIMAÇÃO LINEAR:

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto X. Dado $a \in X$. e $h \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in X$.



$\tan\theta = \dfrac{m}{h}$

$m = \tan\theta . h$

$m = f'(a).h$

t: reta tangente ao gráfico de f em a.

Sua inclinação será $m = f'(a) = \tan\theta$

$r(h)$: erro : um resto que depende da inclinação da reta tangente, ou seja, vai depender de h.

Pelo esquema geométrico acima, temos:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h),$$

onde $r(h) << h$. Isto inspira definir:

Def. 1: Diremos que f: é derivável em a se, e só se, existir um número real $f'(a)$ tal que, pondo

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h),$$

Tiveremos $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

O número $f'(a).h$ chama-se DIFERENCIAL da f no ponto a, e é denotada por $df(a)$. Ou seja, para h infinitesimal:

$$df(x) = f'(x).\underbrace{dx}_{h}.$$

TEOREMA (REGRA DA CADEIA) Sejam $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$, com $f(A) \subset B$, f derivável em $a \in A$ e g derivável em $b = f(a) \in B$. Então, a função composta $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ é derivável em a, com

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Obs.: Note que este teorema já está incluso nas fórmulas de derivadas que deduzimos.

Por exemplo, sabemos que

$$(\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

Escreva $f(x) = u(x)$ e $g(x) = \cos x$.

Então, pela regra da cadeia apresentada acima, temos:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = -\operatorname{sen} x \quad ; \quad f'(x) = u'(x),$$

e disso, segue que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\nu(x))$$

$$= \cos \nu(x)$$

$$g'(f(x)) = g'(\nu(x)) = -\operatorname{sen}(\nu(x)) ;$$

e pela regra:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$(\cos \nu)' = -\operatorname{sen} \nu \cdot \nu'$$

Vamos à demonstração do TEOREMA.

DEMONSTR.: Como f é derivável em $a \in A$ e g é derivável em $b = f(a) \in B$, segue, pela definição 1 que: $\exists\ h, k \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \eta_1(h) ,$$

e

$$g(b+k) = g(b) + g'(b) \cdot k + \eta_2(k) , \quad \text{com}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\eta_1(h)}{h} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \to 0} \frac{\eta_2(k)}{k} = 0 .$$

Vamos computar $(g\circ f)(a+h)$.

$$(g\circ f)(a+h) = g(f(a+h)) =$$

$f(a) = b$

$k := f'(a).h + r_1(h)$

$$g\big(\underbrace{f(a)}_{=b} + \underbrace{f'(a).h + r_1(h)}_{=:k}\big) =$$

$$= \overbrace{g(f(\underbrace{a}_{b}))}^{(g\circ f)(a)} + g'(\underbrace{f(a)}_{b}).(\underbrace{f'(a).h + r_1(h)}_{k}) + r_2\big(\underbrace{f'(a)h + r_1(h)}_{k}\big)$$

Então, subtraindo $(g\circ f)(a)$ e dividindo por h, obtemos:

$$\underbrace{\frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h}}_{\to (g\circ f)'(a)} = \frac{g'(f(a))(f'(a).h + r_1(h))}{h} + \frac{r_2(f'(a).h + r_1(h))}{h}$$

$$= g'(f(a)).f'(a). + \underbrace{\frac{r_1(h)}{h}}_{\substack{\to 0 \\ h\to 0}} + \underbrace{\frac{r_2(f'(a).h + r_1(h))}{h}}_{\substack{\to 0 \\ h\to 0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(g\circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)}$$

$\square$