CÁLCULO 1 | 15/02/24 - AULA 17

Na aula teórica anterior iniciamos o estudo de derivadas. A função $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é derivável em $x_0\in(a,b)$ se, e somente se, existir o limite

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Neste caso, $f'(x_0)$ chama-se A DERIVADA DE f NO PONTO x_0.

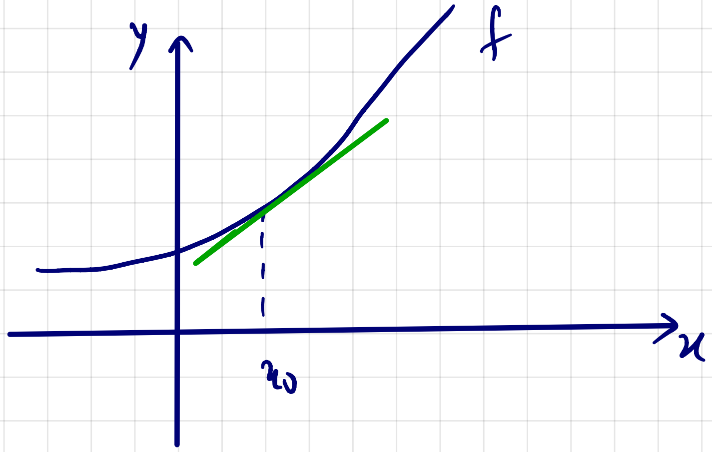
Tomando $h\in\mathbb{R}$ tal que $x_0+h\in(a,b)$, pondo $x=x_0+h$, então, $h=x-x_0$, e disso, $x\to x_0 \iff h\to 0$, e podemos, com isso, escrever:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

A função derivada $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Vimos também que a derivada de uma função em um ponto x_0 representa, geometricamente, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0.



No que segue, apresentaremos o significado físico da derivada.

Seja $s(t)$ a eq. da posição (deslocamento) de um móvel ao longo do tempo t.

A velocidade média é dada pela razão entre o espaço percorrido (deslocamento) e o tempo gasto ao percorrê-lo; ou seja:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{onde:}$$

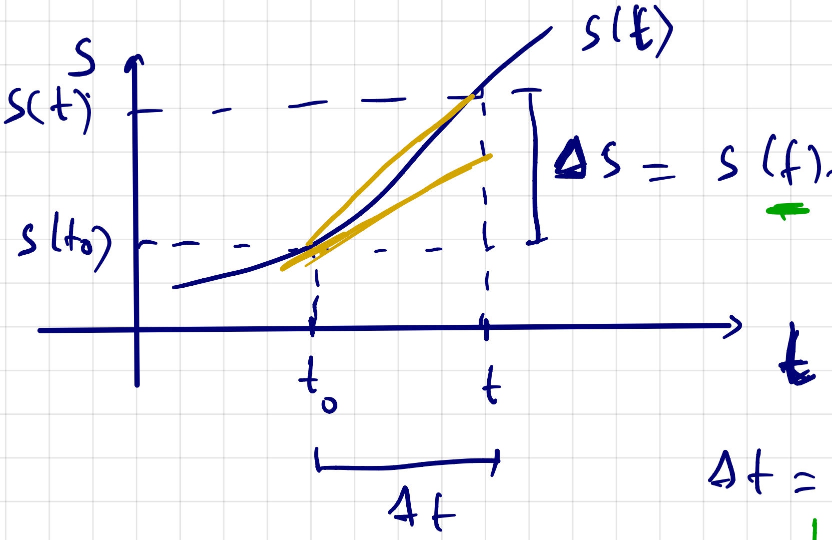
$$\Delta(S) = S(t) - S(t_0) \quad ; \quad \Delta t = t - t_0.$$

Ou seja, $v_m = \dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$

A velocidade instantânea é a taxa de variação do deslocamento em função do tempo, quando o tempo for infinitesimal, ou seja, um limite quando $\Delta t \to 0$.

Mais precisamente:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$



$$\Delta s = s(t) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

$$\Delta t = t - t_0$$

$$\downarrow$$

$$t = t_0 + \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

$\Rightarrow$ Para um $t > 0$ qualquer:

$v(t) = s'(t)$ [ou seja, a velocidade instantânea é a derivada da eq. da posição].

No ensino médio, por exemplo, tem-se a eq. de posição de um móvel em M.R.U.V:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a t^2}{2}$$

A eq. da velocidade (instantânea) será:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{s_0} + v_0 \cdot (t + \Delta t) + \frac{a}{2} \cdot (t + \Delta t)^2 - \cancel{s_0} - v_0 \cdot t - \frac{a}{2} t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{v_0 \cdot t} + v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \left(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2\right) - \cancel{v_0 \cdot t} - \frac{a}{2} t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \cdot \Delta t + \cancel{\frac{a}{2} t^2} + a t \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 - \cancel{\frac{a}{2} t^2}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \cdot \Delta t + a t \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t} \cdot \left[v_0 + a \cdot t + \frac{a}{2} \Delta t\right]}{\cancel{\Delta t}} = \underline{v_0 + at}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

Ex.: Um móvel desloca-se ao longo do tempo, mediante a lei do deslocamento dada por $s(t) = \frac{1}{t^2+1}$ Obter sua velocidade no instante de tempo $t = 1\,s$ (deslocamento em metros e tempo em segundos) solução: $v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{(t+\Delta t)^2+1} - \frac{1}{t^2+1}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{t^2+1 - [(t+\Delta t)^2+1]}{[(t+\Delta t)^2+1](t^2+1)}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\cancel{t^2}\cancel{+1} - \cancel{t^2} - 2t.\Delta t - \Delta t^2 \cancel{-1}}{[(t+\Delta t)^2+1](t^2+1)}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2t\Delta t - \Delta t^2}{[(t+\Delta t)^2+1].(t^2+1)} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}(-2t - \Delta t)}{[(t+\Delta t)^2+1].(t^2+1).\cancel{\Delta t}} = -\frac{2t}{(t^2+1)(t^2+1)}$$

$$= -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$v(1) = \frac{-2.(1)}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\ m/s.$$

DERIVADAS LATERAIS:

Sendo em vista que uma derivada é um limite, ou seja,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

temos que tal limite existe se os limites laterais existirem e forem iguais. Ou seja, vamos definir o conceito de derivadas laterais:

Def.: Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivável e $x_0 \in (a,b)$

Definimos as derivadas laterais em x_0 por:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad e$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

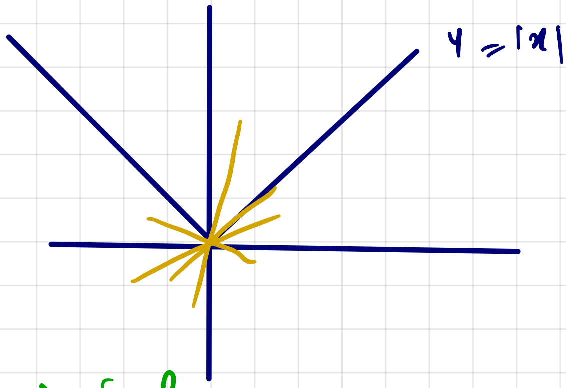
Portanto, em concordância com o conceito de limite, temos que, f é derivável em x_0 se, e somente se, as derivadas laterais em x_0 existirem e forem iguais, ou seja;

$$\exists f'(x_0) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Vejamos alguns exemplos:

01) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

Perguntamos: f é derivável em $x=0$?



geometricamente vimos que em $x=0$ há uma mudança gráfica muito forte (estúpida), o que sugere que f não seja derivável em $x=0$, pois ser derivável em um ponto significa existir uma reta tangente ao gráfico de f naquele ponto.

Escreva $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Vamos calcular as derivadas laterais de f em $x=0$.

• $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} =$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

• $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} =$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

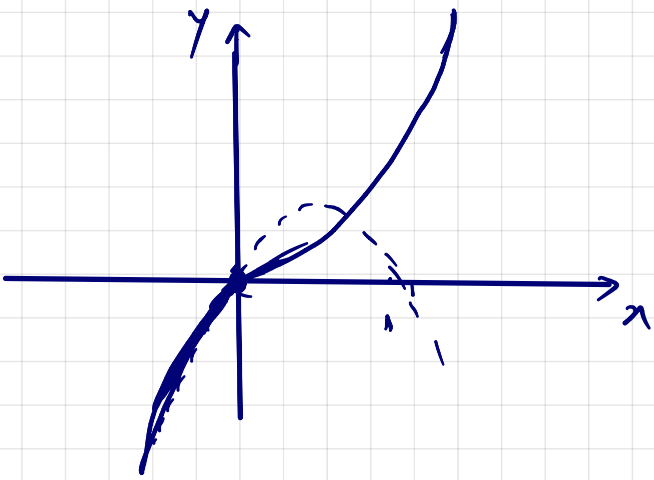
Ou seja, obtemos

$$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$$

Portanto, f não é derivável na origem.

• 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 0 \\ x - x^2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Verifique se f é derivável em $x=0$.



SOLUÇÃO:

$f(0) = 0^2 = 0$

• $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - x^2 - 0}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}} = 1$

• $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x} =$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$f'_-(0) = +1 \neq 0 = f'_+(0).$$

Logo, f não é derivável em $x=0$.

PRIMEIRAS REGRAS DE DERIVAÇÃO:

No que segue, apresentaremos regras de derivação, que tornarão o cálculo de derivadas bem mais simples, visto que não precisaremos recorrer à definição, cujo cálculo é exaustivo.

01) $y = K$ (K CONSTANTE REAL) $\Rightarrow$ $y' = 0$

(ou seja, a derivada de uma constante é zero)

De fato, seja $f(x) = K$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.
Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que $x+h \in (a,b)$, então

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{K - K}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Ex: $f(x) = 3$; $\Rightarrow f'(x) = 0$

02) $f(x) = \alpha \cdot x$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. $\Rightarrow f'(x) = ?$

Dado $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, e seja $x \in (a,b)$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $x+h \in (a,b)$. Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha \cdot (x+h) - \alpha \cdot x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\alpha \cdot x} + \alpha \cdot h - \cancel{\alpha \cdot x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \alpha}$$

Ex.: $f(x) = 5x$ $\Rightarrow f'(x) = 5$

Aliás; se $f(x) = x$ $\Rightarrow f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{\cancel{h}} = 1$$

03) $f(x) = u + v$, onde $u = u(x)$; $v = v(x)$

$\Rightarrow f'(x) = ?$

Dado $x \in D(f)$ e seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in D(f)$.

Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{u'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}_{v'(x)} =$$

$$= u'(x) + v'(x).$$

conclusão:

$$y = u + v \Rightarrow y' = u' + v',$$

<u>Ex. 1</u> $\quad y = 3 + 2x \Rightarrow y' = ?$

$$y' = (3)' + (2x)' = 0 + 2 = 2$$

04) $\quad y = v^k \quad , \quad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$

$$\Rightarrow y' = ? \qquad v = v(x)$$

Dado $x \in D(f)$ e seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in D(f)$. Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[v(x+h)]^k - [v(x)]^k}{h}$$

$$a^{k} - b^{k} = (a-b).\underbrace{\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + b^{k-1}\right)}_{k \text{ aditivos}}$$

De fato:

$$\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\dots+b^{k-1}\right)\cdot(a-b)$$

$$= a^k + \cancel{a^{k-1}b} + \cancel{a^{k-2}b^2} + \cancel{\dots} + \cancel{ab^{k-1}} - \cancel{a^{k-1}b}$$

$$- \cancel{a^{k-2}b^2} - \cancel{\dots} - b^k = a^k - b^k$$

Ex.:

$$a^2-b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$a^4-b^4 = (a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$\vdots$$

Voltando ao problema:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[r(x+h)]^k - [r(x)]^k}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left[r(x+h)-r(x)\right]\cdot\Big[(r(x+h))^{k-1} +$$

$$+ r(x+h)^{k-2}\cdot r(x) + r(x+h)^{k-3}\cdot r(x)^2 +$$

$$\dots + r(x)^{k-1}\Big]$$

k aditivos

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}_{v'(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\underline{v(x+h)}^{k-1} + v(x+h)^{k-2} \cdot v(x) + \dots + v(x)^{k-1} \right)$$

$$= v'(x) \cdot \Big[\underbrace{(v(x))^{k-1} + (v(x))^{k-1} + \dots + (v(x))^{k-1}}_{k \text{ aditivos}} \Big]$$

$$= k \cdot [v(x)]^{k-1} \cdot v'(x)$$

conclusão:

$$y = [v(x)]^k \Rightarrow y' = k \cdot [v(x)]^{k-1} \cdot v'(x).$$

Ex.: a) $y = x^3 \Rightarrow y' = k \cdot v^{k-1} \cdot v'$

$k = 3$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$$y' = 3 \cdot x^{3-1} \cdot 1 = 3x^2$$

(b) $y = \frac{1}{x^5} \Rightarrow \quad y' = ?$

$$y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}.$$

$y = u^k$

$\Rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

$$\Rightarrow y' = (-5) \cdot x^{-5-1} \cdot 1$$

$$y' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

(c) $y = x^5 + 3x^2 - 2x + 7$

$y' = ?$

$$y' = 5 \cdot x^4 + 3 \cdot 2 \cdot x^1 - 2 \cdot 1 + 0$$

$$\boxed{y' = 5x^4 + 6x - 2}$$

(d) $y = (3x^2 - x)^4. \qquad y' = ?$

$$y = u^k. \Rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

$u = 3x^2 - x \Rightarrow u' = 3 \cdot (2x) - 1$

$u' = 6x - 1$

Dimo, segue :

$$y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' = 4 \cdot (3x^2 - x)^{4-1} \cdot (6x - 1)$$

$$y' = 4 \cdot (3x^2 - x)^3 \cdot (6x - 1)$$