CÁLCULO 1.

$\boxed{06/02/24 - \text{AULA } 16}$

obs: 07/02 - AULÃO GAMA C1.
Sala 221 - PS ; 13h.

AULA DE EXERCÍCIOS:

LISTA 05

2. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x < 3 \\ mx + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 3$.

Queremos continuidade de f em $x=3$. Então, obrigatoriamente, tem-se que $\exists \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$; onde:

$$f(3) = m \cdot 3 + 1 = 3m+1$$

$$\exists \lim_{x \to 3} f(x) \iff \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x);$$

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$

$$= \lim_{x \to 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (mx+1) = 3m+1.$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \iff 6 = 3m+1$$

$$3m = 5$$

$$\boxed{m = \frac{5}{3}}$$

LISTA 05)

3. Mostre que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

Precisamos verificar $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = ?$$

Como $\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1$, i.e., é uma função limitada, e como $\lim_{x \to 0} x = 0$, segue pela proposição abaixo que $\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0)$.

Logo, f é cont. em $x = 0$.

PROPOSIÇÃO: Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to 0} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

DEMONSTR.: Seja f limitada em $X \subset \mathbb{R}$. Então, $\exists K > 0$, tal que $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $\lim_{x \to 0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (por hipótese), então,

$\exists\, \delta > 0$, tal que,

$$\forall x \in X: \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Assim, $\forall x: 0 < |x-a| < \delta$, teremos:

$$|f(x)\cdot g(x) - 0| = |f(x)\cdot g(x)| = \underbrace{|f(x)|}_{\leq K} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{K}} < \cancel{K}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{K}} = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f\cdot g \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

$\square$

L5

4. Mostre que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua.

Dado $a > 0$. Vamos mostrar que f é cont. em $x = a$.

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos mostrar que $\exists\, \delta > 0$ $\delta(\varepsilon, a)$ tal que, $\forall x > 0$: $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Avaliando a diferença $|f(x) - f(a)|$:

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|(\sqrt{x} - \sqrt{a})\cdot\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(\sqrt{x})^{\cancel{2}} - (\sqrt{a})^{\cancel{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{\overbrace{|x-a|}^{<\delta}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} := \varepsilon$$

$x, a > 0$

$$\sqrt{x}+\sqrt{a} > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Ou seja, basta tomar $\frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon$, i.e., $\boxed{\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{a}}$.

Logo, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $x = a$.

Pela arbitrariedade da escolha do $a > 0$, segue que f é contínua em $(0, +\infty)$.

$\square$

L05 – 05) Mesma ideia da anterior.

$f(x) = \operatorname{sen} x$. mostrar que é cont.

Dado $a \in \mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon > 0$. Vamos obter $\delta > 0$ tal que, $\forall x$: $|x - a| < \delta$, implique em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x) - f(a)|$:

$$|f(x) - f(a)| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = \left| 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right| =$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$= 2 \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \cdot \underbrace{\left| \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right|}_{\leq 1} \leq 2 \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \leq \cancel{2} \cdot \left| \frac{x-a}{\cancel{2}} \right|$$

$$|\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$$

$$= |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Logo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é cont. (devido à arbitrariedade de escolha do ponto a).

L5 I

6. Observando os dois exercícios acima, conclua que $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ é contínua em todo o seu domínio.

Note que $u(x) = \sqrt{x}$ é cont. no seu domínio,

$v(x) = \operatorname{sen} x$ é cont. em seu domínio.

Então, $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x} = \operatorname{sen}(u(x)) = v(u(x))$

$= (v \circ u)(x)$, é uma composição de funções contínuas. Portanto, f é cont.

L5 II

8. Dada a função real de variável real $f(x) = 4 + 3x - x^2$. Use o Teorema do Valor intermediário para mostrar que existe um $c \in [2, 5]$ tal que $f(c) = 1$. Determine também o valor de $f(c)$.

$f(x) = 4 + 3x - x^2$, é contínua.

- $f(2) = 4 + 3.(2) - (2)^2 = 6$
- $f(5) = 4 + 3.(5) - (5)^2 = 19 - 25 = -6$

$$f(5) = -6 < 1 < 6 = f(2)$$

Então, pelo T.V.I., segue que

$\exists$ c entre 2 e 5 tal que

$$f(c) = 1.$$

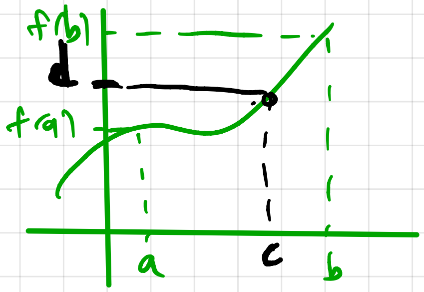
obs.:

T.V.I.: f - contínua.

$f(a) < d < f(b)$

$\Rightarrow \exists$ c entre a e b

tal que $f(c) = d$.



LISTA 06

2. Em cada item a seguir, usando a definição de derivada, obtenha a função derivada f' e obtenha a equação da reta tangente no ponto x_0 indicado.

(a) $f(x) = x^2 - 3x - 1$; $x_0 = 2$.

(b) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $x_0 = 1$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 4$

(d) $f(x) = \ln(1-x)$; $x_0 = 0$.

(b) $f(x) = \sqrt{3-2x}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3-2.(x+h)} - \sqrt{3-2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3-2x-2h} - \sqrt{3-2x}}{h} \times \frac{\sqrt{3-2x-2h} + \sqrt{3-2x}}{\sqrt{3-2x-2h} + \sqrt{3-2x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3-2x-2h})^{\cancel{2}} - (\sqrt{3-2x})^{\cancel{2}}}{h.\left[\sqrt{3-2x-2h} + \sqrt{3-2x}\right]} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3} \cancel{-2x} - 2h \cancel{-3} \cancel{+2x}}{h.\left[\sqrt{3-2x-2h} + \sqrt{3-2x}\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}.\left[\sqrt{3-2x-2h} + \sqrt{3-2x}\right]}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3-2x} + \sqrt{3-2x}} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}}$$

Em $x_0 = 1$; qual a eq. da reta tangente ao gráfico de f?

$y - y_p = m(x - x_p)$; onde m = inclinação da reta tangente

$P(x_0, f(x_0)) = (1, f(1))$, onde:

$f(1) = \sqrt{3 - 2\cdot(1)} = 1.$

$P(1,1).$

$m = f'(x_0)$

$m = f'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{3-2(1)}}$

$\Rightarrow m = -\dfrac{1}{\sqrt{1}}$

$\boxed{m = -1}$

Portanto, a eq. da reta tangente ao gráfico de f em $P(1,1)$ $[x_0 = 1]$ será:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y - 1 = -1.(x - 1)$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$\boxed{y = -x + 2}$ eq. da reta tangente ao gráfico de f em $P(1,1)$

EXTRA DO EXERCÍCIO: eq. da reta tangente em $x_0 = -2$

$P(-2, f(-2))$; $f(-2) = \sqrt{3 - 2(-2)} = \sqrt{7}$

$P(-2, \sqrt{7})$

eq. da reta tangente em P (ao gráfico de f):

$$y - y_p = m(x - x_p) \text{ ; onde}$$

$$m = f'(2) = -\frac{1}{\sqrt{3-2(-2)}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

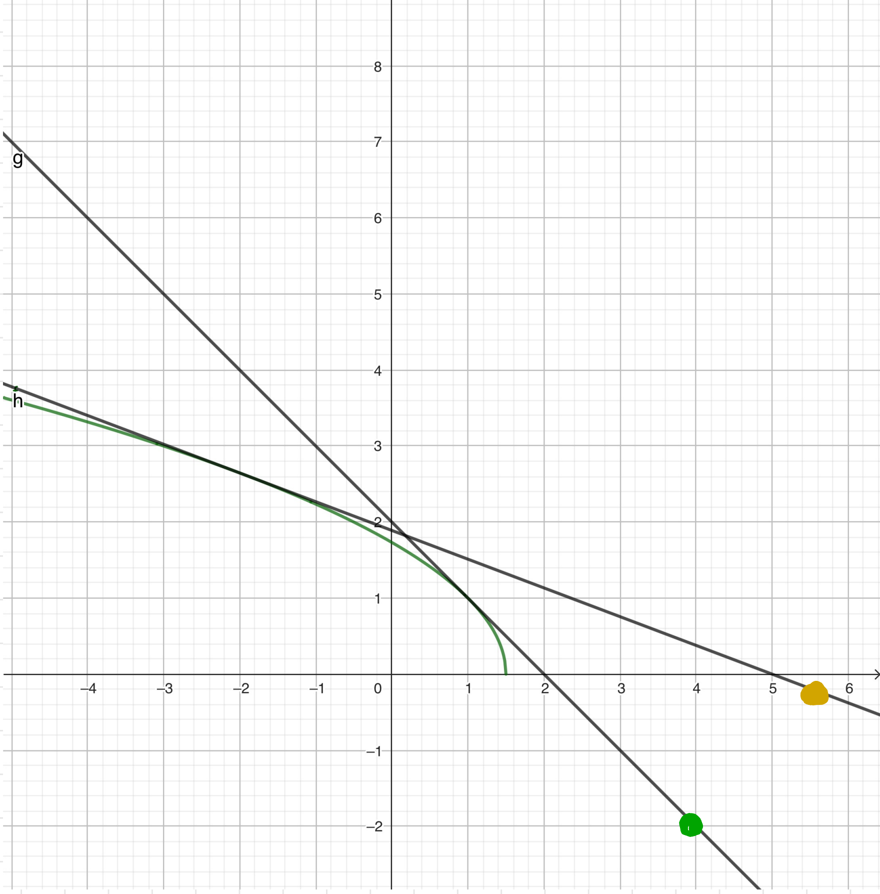
Dessa forma, obtemos:

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

$$y - \sqrt{7} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot (x - (-2))$$

$$y = \sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}} x - \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{7}} x + \sqrt{7} - \frac{2}{\sqrt{7}}}$$



LISTA 06

3. Calcule a derivada de cada função abaixo, usando a definição de derivada:

(a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ (b) $f(x) = \sqrt{3 - 4x}$ (c) $f(x) = \text{sen}\,(2x - 3)$

(d) $f(x) = \ln(3 - 2x)$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$ (f) $f(x) = \ln \dfrac{2}{x - 1}$

SOLUÇÃO

(f) Escreva, primeiramente:

$$f(x) = \ln 2 - \ln(x - 1)$$

Assim, a função derivada f' será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln 2 - \ln(x + h - 1) - (\ln 2 - \ln(x - 1))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\ln 2} - \ln(x+h-1) - \cancel{\ln 2} + \ln(x-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x-1) - \ln(x+h-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x+h-1}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x-1}{x+h-1}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$\ln \lim_{h\to 0} \left(\frac{x-1}{x+h-1}\right)^{\frac{1}{h}} \to 1^{\infty} = \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \underbrace{\frac{x-1}{x+h-1} - 1}_{\text{exp.}}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$(1+\text{exp.})^{\frac{1}{\text{exp.}}}$$

$$= \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{\cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} - h + \cancel{1}}{x+h-1}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \underbrace{\frac{-h}{x+h-1}}_{\text{exp}}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \ln \left[\underbrace{\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{-h}{x+h-1}\right)^{\frac{x+h-1}{-h}}}_{\to e} \right]^{\frac{-h}{x+h-1} \cdot \frac{1}{h}} =$$

$$= \ln e^{\lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{(x+h-1)\cdot \cancel{h}}} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x+h-1} \cdot 1$$

$$= -\frac{1}{x-1}.$$

Conclusão: $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x-1}}$

16

4. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = f(a) - af'(a).$$

já temos que f é derivável.

$$\lim_{x\to a} \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(a) + a\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)\cdot(x-a) + a\cdot(f(a)-f(x))}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)\cdot\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} - \lim_{x\to a} \frac{a\cdot(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$$= f(a) - a\cdot \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} = f(a) - a\cdot f'(a).$$