CÁLCULO 1 02/02/24 AULA 14

Na aula passada estudamos funções contínuas.

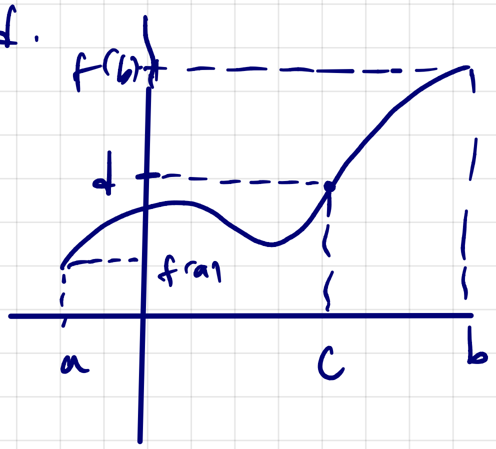
Se $f: A \to \mathbb{R}$ função, $a \in A$ um ponto de acumulação do conjunto A, então:

$$f \text{ é cont. em } x = a \overset{def}{\iff} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\Updownarrow$$

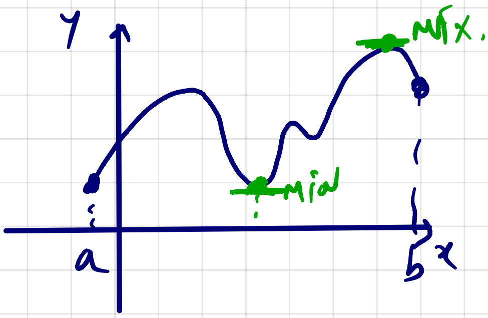
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Vimos também o T.V.I.: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e $f(a) < d < f(b) \Rightarrow \exists\, c$ entre a e b tal que $f(c) = d$.



OU SEJA, QUALQUER NÚMERO REAL ENTRE DUAS IMAGENS, É IMAGEM DE ALGUM VALOR DO DOMÍNIO, MEDIANTE f.

Também vimos o T. de WEIERSTRASS: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é cont. no intervalo fechado $[a,b]$, então f assume um valor máximo e um valor mínimo.



DERIVADAS:

Def.: Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função e $x_0\in(a,b)$ um ponto de acumulação. Diremos que f é derivável no ponto x_0 se, e somente se, existir o limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}:=f'(x_0).$$

Existindo tal limite $f'(x_0)$, o mesmo é chamado de DERIVADA de f no ponto x_0.

Escrevendo $h=x-x_0$, então $x=x_0+h$.

Neste caso, $x\to x_0 \Leftrightarrow h\to 0$.

Dessa forma, podemos escrever a derivada de f no ponto x_0 por:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Vejamos alguns exemplos:

01) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $x\geq 1$.

Tome $a\in\mathbb{R}$ tal que $a>1$.

Verifiquemos se $\exists\, f'(a)$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}}{x-a}= \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{a-1}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1}} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{a-1})^2}{(x-a).(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})} = \lim_{x \to a} \frac{x \cancel{-1} - a \cancel{+1}}{(x-a).(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{(\cancel{x-a}).(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})} = \frac{1}{\sqrt{a-1} + \sqrt{a-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a-1}}$$

Logo, f é derivável em $x = a$, com $a = \frac{1}{2\sqrt{a-1}}$.

02) $f(x) = \ln(2x+3)$. Obter $f'(1)$.

Solução:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x+3) - \ln 5}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \cdot \ln\left(\frac{2x+3}{5}\right) = \lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{2x+3}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$\ln(\alpha) - \ln(\beta) = \ln \frac{\alpha}{\beta}$

$a \ln b = \ln b^a$

$$= \ln \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+3}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty}$$

$\rightarrow$ indeterminação que exige o uso do 2º limite notável.

$$(1 + \text{exp.})^{\frac{1}{\text{exp.}}}$$

$$= \ln \lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{2x+3}{5} - 1\right)^{\frac{1}{x-1}} = \ln \lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{2x+3-5}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \ln \lim_{x \to 1} \left(1 + \underbrace{\frac{2x-2}{5}}_{\text{expressão}}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \ln \left[\underbrace{\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{2x-2}{5}\right)^{\frac{5}{2x-2}}}_{\to e}\right]^{\frac{2x-2}{5} \cdot \frac{1}{x-1}} = \ln e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-2}{5(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}}{5\cancel{(x-1)}} = \frac{2}{5}$$

$$\ln e^{\alpha} = \alpha \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = \alpha \cdot \underbrace{\log_e e}_{1} = \alpha$$

---

03) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Achar $f'(2)$.

Solução: $$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x + 1 - [2(2)^2 - 3\cdot(2) + 1]}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x \cancel{+1} - 8 + 6 \cancel{-1}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} \quad \frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-2 & x-2 \\ \hline -2x^2+4x & 2x+1 \\ \hline \quad x-2 & \\ \quad -x+2 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$$

Assim:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(2x+1)}{\cancel{x-2}}$$

$$=2\cdot(2)+1=5 \qquad \Rightarrow \boxed{f'(2)=5}$$

Obs.: Se $\nexists \displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, dizemos que f não é derivável no ponto x_0.

Def.: Se $f: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com X intervalo aberto de $\mathbb{R}$, é derivável para todo $x\in X$, definimos a função derivada $f': X\to\mathbb{R}$ por

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

ou simplesmente, a derivada de f.

Ex.: (a) $f(x)=x^2$. $f'=?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}.(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

conclusão:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x.$$

(b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}$. $f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(3.(x+h)-1)} - \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(3x+3h-1)} - \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}}{h} \times \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(3x+3h-1)} + \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x+3h-1)} + \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x+3h-1) - \operatorname{sen}(3x-1)}{h \cdot \left(\sqrt{\operatorname{sen}(3x+3h-1)} + \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}\right)} \; =$$

Transformando a diferença do numerador em produto, usando a fórmula(*)

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2},$$ temos:

$$\operatorname{sen}(\underbrace{3x+3h-1}_{p}) - \operatorname{sen}(\underbrace{3x-1}_{q}) =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{3x}+3h \cancel{-1} - \cancel{3x} \cancel{+1}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x+3h-1+3x-1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x+3h-2}{2}\right).$$

Assim, voltando ao cálculo da derivada, temos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x+3h-2}{2}\right) \cdot \frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{3}{2} h \cdot \left(\sqrt{\operatorname{sen}(3x+3h-1)} + \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}\right)} =$$

$\to 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot \cos\left(\frac{6x+3h-2}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x+3h-1)} + \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \cos\left(\frac{6x-2}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)} + \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}} = \frac{3 \cdot \cos(3x-1)}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}}$$

(*) Vista na aula 07.

Ou seja, de $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}$, obtemos

$$f'(x)=\frac{3\cos(3x-1)}{2\sqrt{\operatorname{sen}(3x-1)}}.$$

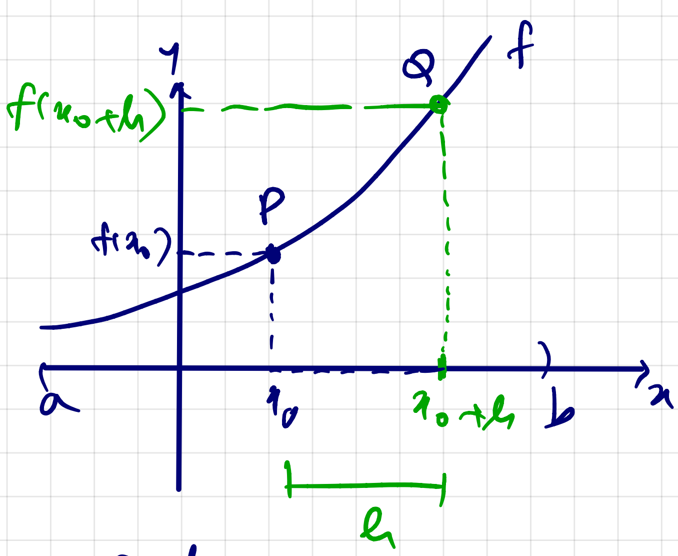
Percebe-se que, <u>pela definição</u>, o cálculo de derivada (seja derivada em um ponto, ou a obtenção da função derivada), é bastante trabalhoso. Nas próximas aulas descreveremos regras de derivação que tornarão o cálculo bem mais simples.

SIGNIFICADOS FÍSICO E GEOMÉTRICO DA DERIVADA EM UM PONTO.

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivável em um ponto x_0 no interior de (a,b).

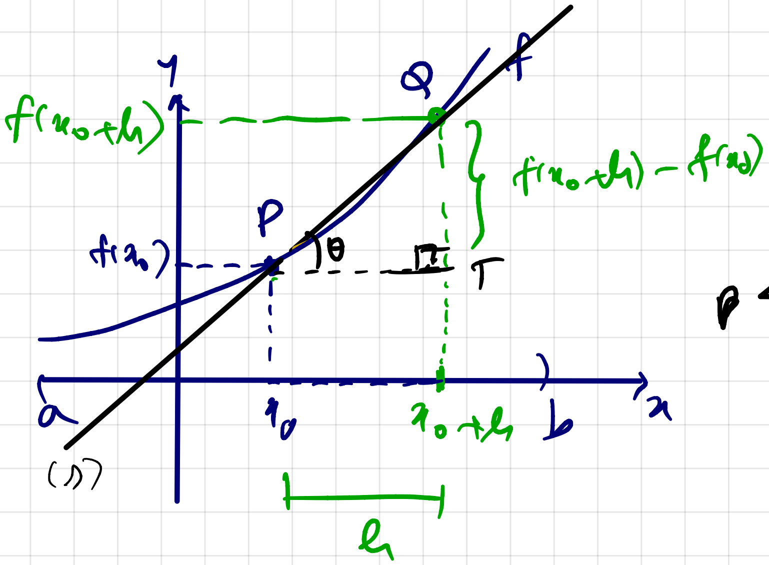
Seja $h\in\mathbb{R}$ tal que $x_0+h\in(a,b)$.

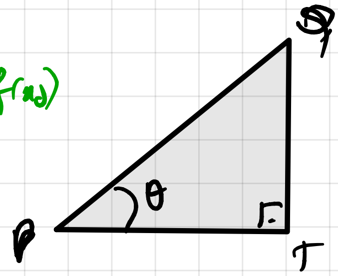
Isso determina o ponto $Q(x_0+h,\, f(x_0+h))$.



Como $h\to 0$ (i.e. varia), diremos que Q é um ponto móvel sobre a curva e $P(x_0, f(x_0))$ é um ponto fixo.

Seja (s) a reta secante ao gráfico de f nos pontos P e Q.





Chamando de θ a inclinação da reta (s), temos:

$$\tan\theta = \frac{\overline{QT}}{\overline{PT}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Fazendo $h \to 0$, o ponto Q se aproxima do ponto P, ou seja, a reta secante ao gráfico de f nos pontos P e Q, à medida em que $h \to 0$, tende a uma reta tangente ao gráfico de f no ponto P.

Ou seja, o coeficiente angular α da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 (i.e. em P), será dado por

$$\alpha = \lim_{h\to 0} \tan\theta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Resumindo: a derivada da função em um ponto x_0 fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no referido ponto.

Ex.: Obter a eq. da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x = 1$.

Solução: a eq. da reta é

$$y - y_p = m.(x - x_p),$$

onde $P(x_p, y_p)$; $x_p = 1$; $y_p = f(x_p) = (1)^2 = 1$.

$$P(1,1)$$

m – coeficiente angular; e será:

$$m = f'(1), \quad \text{como } f'(x) = 2x,$$

ISSO FOI FEITO ANTERIORMENTE

segue que

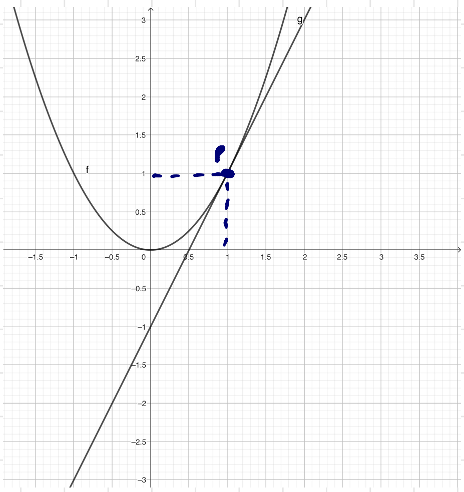
$$f'(1) = 2.(1) = 2.$$ Assim, a

eq. da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ será:

$$y - 1 = 2.(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$



O significado físico da derivada ficará para depois da 2ª prova.