CÁLCULO 1.

27/02/24 – AULA 20

No final da aula passada estudamos o teorema da regra da cadeia: f, g deriváveis, f derivável em a, g derivável em $b = f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em a, com

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Observamos que as regras de derivação estudadas até aqui já contêm a regra da cadeia. Por exemplo

$$(\ln v)' = \frac{v'}{v} \quad \text{(pela regra)}$$

Usando a regra da cadeia, que consiste em obter derivações de funções compostas, tomando $f(x) = v(x)$ e $g(x) = \ln x$, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln v(x)$$

Então

$$(g \circ f)'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da} \\ \text{cadeia}}}{=} g'(f(x)) \cdot f'(x) \stackrel{(*)}{=}$$

$$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(x) = v(x) \Rightarrow f'(x) = v'(x)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{f(x)} \cdot v'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

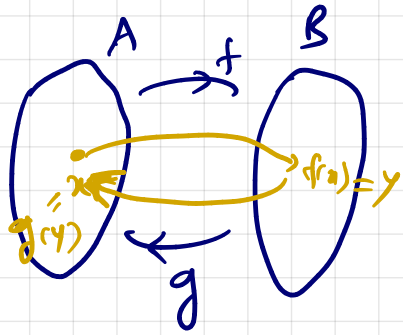
DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

Vamos deduzir fórmulas para derivadas das funções trigonométricas inversas. Para isto, precisamos introduzir o conceito de função inversa.

Dada $f: A \to B$, $y = f(x)$, uma função que manda todos os elementos de A para elementos de B de maneira única, pondo $x \in A \longmapsto y = f(x) \in B$.

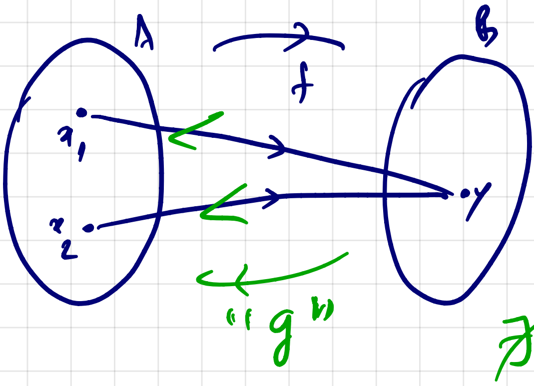
Perguntamos, pode existir uma função $g: B \to A$ que faz "o caminho de volta", ou seja, toma $y \in B$ e envia para $x = g(y) \in A$?

Se isso acontecer, dizemos que $f: A \to B$ é inversível e $g: B \to A$ será sua inversa.



Perceba que, para f ser inversível ela deve ser:

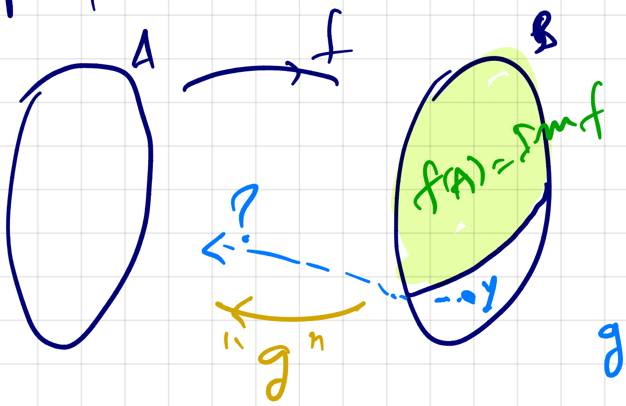
- injetiva; pois domínios diferentes terão imagens diferentes. Do contrário, uma $f: A \to B$ não poderá possuir $g: B \to A$, pois um elemento $y \in B$ poderia ter mais de uma imagem $x \in A$, o que contradiz o conceito de função.



$f(x_1) = f(x_2) = y$
f não é injetiva

$\nexists\, g: B \to A$, pois senão $g(y) = x_1$ ou x_2.

- sobrejetiva, pois se não o for, então na "tentativa" de se obter $g: B \to A$, haveriam elementos do domínio B que não possuiriam imagem, o que contradiz a def. de função.

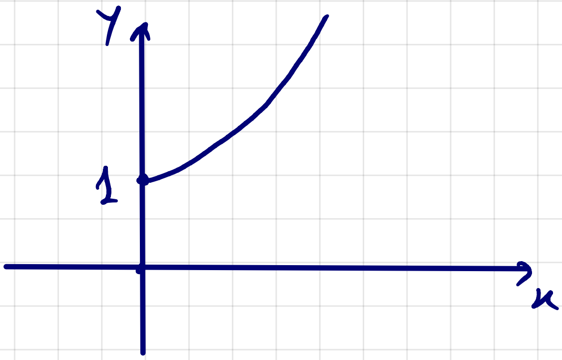


$g(y)$ não existe!
Absurdo!

Conclusão, para $f: A \to B$ ser inversível, ela deve ser bijetiva, i.e., injetiva e sobrejetiva.

Ex: $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$.

f é inversível? Se for bijetiva, sim.



f é injetiva pois é crescente e é sobrejetiva pois $\text{Im}(f) = [1, +\infty) = CD(f)$

Logo, $\exists\ g: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

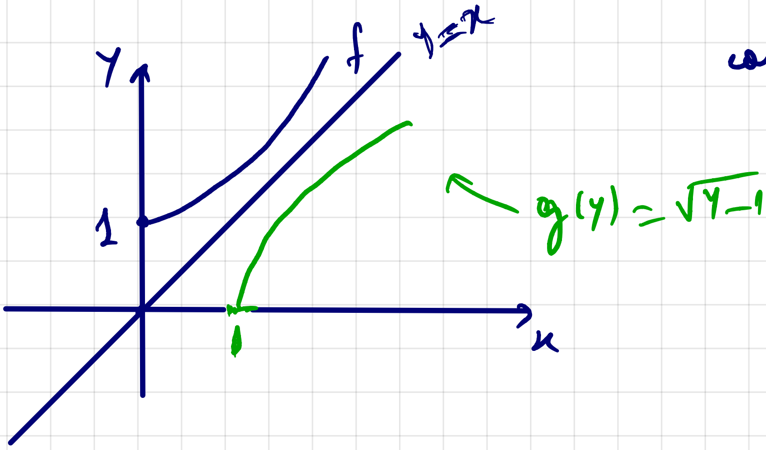
$$x = g(y).$$

Ou seja, de $y = x^2 + 1$, precisamos isolar o x:

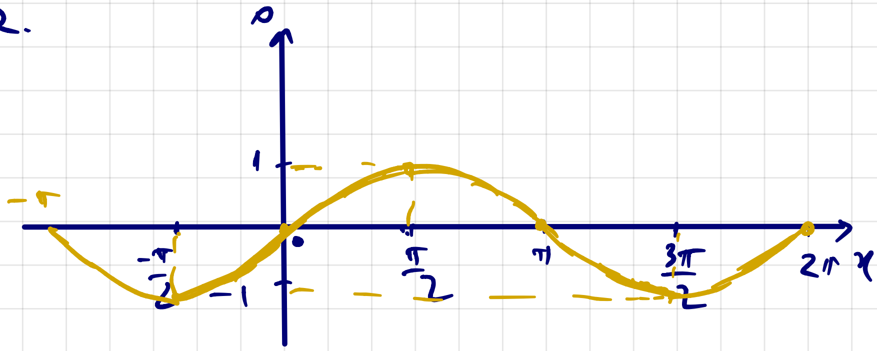
$$y - 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$$

$$g(y) = \sqrt{y-1}$$

Gráfico da inversa, a partir da função f dada: é um espelhamento com a reta $y=x$.



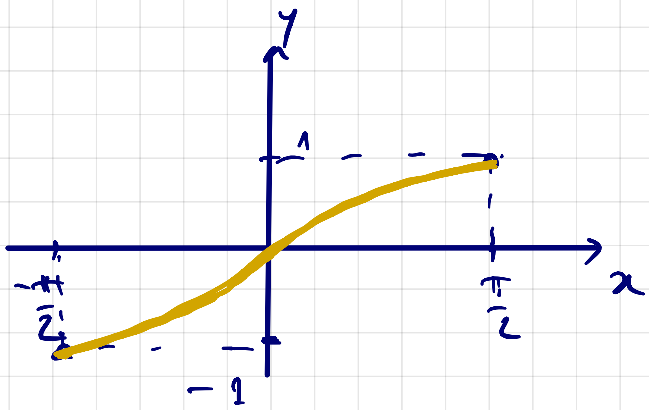
FUNÇÃO ARCO-SENO A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ não é inversível, pois não é nem injetiva e nem sobrejetiva.



Para obter uma inversa precisamos restringir domínio e contradomínio de modo que $\operatorname{sen} x$ torne-o bijetiva. Tomamos o domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e contradomínio $[-1, 1]$:

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad f(x) = \operatorname{sen} x \text{ é}$$

bijetiva.



Logo, $\exists\ g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ inversa de f;

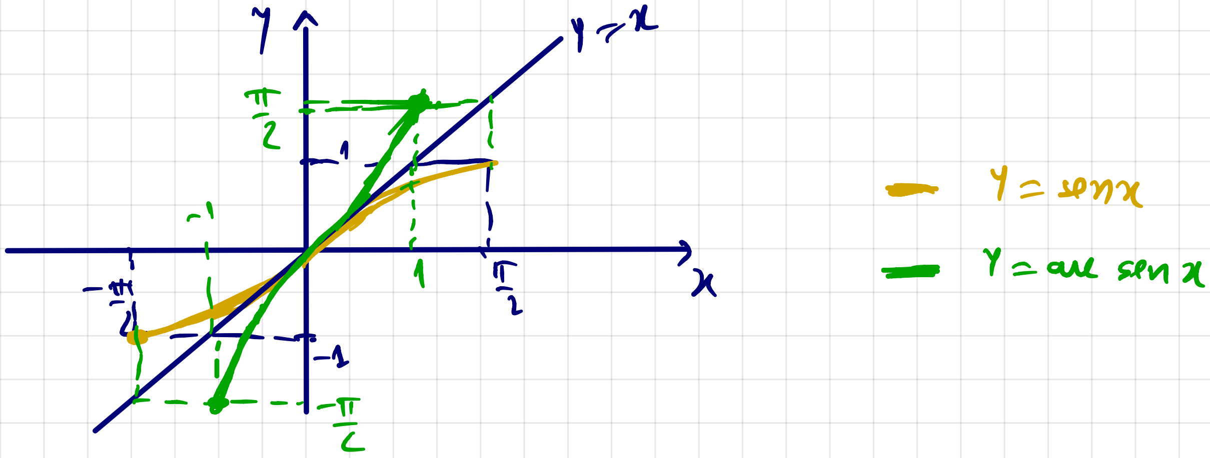
$$x = g(y), \quad \text{onde}$$

$$y = \operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{arcsen}(y) = g(y)$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{arcsen}(30°)$$

$$y = \operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{arcsen}(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$-1 \leq y \leq 1 \ ; \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

gráfico de $y = \operatorname{arcsen} x$.



Raciocínios análogos são feitos para determinar $y = \operatorname{arc\,cos} x$; $y = \operatorname{arc\,tan} x$; $y = \operatorname{arc\,sec} x$; $y = \operatorname{arc\,csc} x$ e $y = \operatorname{arc\,cot} x$. Estas funções são chamadas de funções trigonométricas inversas.

Vamos à dedução de fórmulas para derivadas das funções trigonométricas inversas. (já com a regra da cadeia presente)

17) $$\boxed{y = \operatorname{arcsen} v \Rightarrow y' = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}}$$

Aqui, $v = v(x)$.

Note que $y = \operatorname{arcsen} v \Leftrightarrow v = \operatorname{sen} y$

Como $y = y(x)$ e $v = v(x)$, derivando em x, obtemos

$$v' = \cos y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{v'}{\cos y}$$

Como

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1, \text{ então}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - v^2}$$

Portanto:

$$\underbrace{y'}_{} = \frac{v'}{\cos y} = \underbrace{\frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}}_{}$$

Ex.: $y = \operatorname{arcsen}(x - x^2)$. $\quad y' = ?$

$$y = \operatorname{arcsen} v \Rightarrow y' = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$u = x - x^2 \Rightarrow u' = 1 - 2x$$

Então,

$$y' = \frac{1-2x}{\sqrt{1-(x-x^2)^2}}$$

18) $$\boxed{y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

$$y = \arccos u \Leftrightarrow u = \cos y.$$

$u = u(x)$; $y = y(x)$. Derivando em x, obtemos:

$$u' = -\operatorname{sen} y \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\operatorname{sen} y}$$

Da trigonometria, $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y}$$

$$= \sqrt{1-u^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{u'}{\operatorname{sen} y} = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

19) $\boxed{y = \arctan u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}}$

$y = \arctan u \Leftrightarrow u = \tan y$. , com $u = u(x)$; $y = y(x)$

Derivando em x, obtemos:

$$u' = \sec^2 y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sec^2 y}$$

Da trigonometria tem-se que

$1 + \tan^2 y = \sec^2 y$. Assim:

$$y' = \frac{u'}{\sec^2 y} = \frac{u'}{1+\tan^2 y} = \frac{u'}{1+u^2}$$

Ex.: $y = \arctan \sqrt{x}$. $y' = ?$

$$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1 = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

20) $\boxed{y = \operatorname{arccsc} u \Rightarrow y' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$

$y = \operatorname{arccsc} u \Leftrightarrow u = \csc y$. Derivando em x, vem:

$$u' = -\csc y \cdot \cot y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{u'}{\csc y \cdot \cot y}.$$

Da trigonometria: $1 + \cot^2 y = \csc^2 y$

$$\Rightarrow \cot y = \sqrt{\csc^2 y - 1}.$$

Assim, teremos:

$$y' = -\frac{u'}{\csc y \cdot \cot y} = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$$

$u = \csc y$

Como exercício, deduza as fórmulas para as derivadas de:

- $y = \text{arc sec } u$ (21)
- $y = \text{arc cot } u$. (22)

DERIVADAS DE FUNÇÕES DEFINIDAS PARAMETRICAMENTE:

Uma função $f: A \to B$ é definida parametricamente quando $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Por exemplo,

$$f: [0, 1] \to \mathbb{R},$$

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 + 1. \end{cases}$$

Como $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $f(t)$ deve ser derivada em t. Veremos como se faz.

Obs: Muitas vezes podemos PARAMETRIZAR uma função ou "DESPARAMETRIZAR". Por exemplo, a $y = x^2 + 2x$, podemos, por exemplo, escrever:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$$
, uma parametrização.

Até o presente momento, estamos usando o símbolo $f'(x)$ para denotar a derivada de f. Existem outras notações para a derivada:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D_x f.$$

Voltando à derivação de f definida parametricamente por $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$

$$y' = f'(x) = \left(f(x(t))\right)' = (f \circ x)'(t)$$

$$= f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{y'}_{y'(t)} = f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ou seja, se $f(x)$ é tal que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

então $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

EXEMPLO: Calcule a derivada, parametricamente, de

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \ln(2-t) \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

$$x'(t) = 2t$$

$$y'(t) = \frac{-1}{2-t}$$

Então $y' = f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-\frac{1}{2-t}}{2t}$

$$= -\frac{1}{2-t} \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{1}{2t(2-t)} = -\frac{1}{4t-2t^2}$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE:

Def.: Uma função f é definida implicitamente quando não está isolada a variável independente x, ou seja, quando temos $f(x, y) = k$.

Ex.: $y = 3x^2 - 2x + \operatorname{sen} x$ está definida explicitamente, já $xy - \operatorname{arcsen}(x+y) = 3$ está implicitamente

Como derivar funções definidas implicitamente? Basta usar as regras estudadas, observando que $y = y(x)$, se derivarmos em x (caso derivemos em y então considere $x = x(y)$)

Ex.: 01) $x^2 + y^2 = 2x$. Obter y'.

Solução: Derivando (em x), obtemos: $[y = y(x)]$

$$2x + 2y \cdot y' = 2$$

$$2y \cdot y' = 2 - 2x \quad (\div 2)$$

$$y \cdot y' = 1 - x$$

$$\boxed{y' = \frac{1-x}{y}}$$

02) Dada a função implícita

$$\ln(x+y) + x^2y^3 = \arctan x^2,$$

obter a derivada y'.

<u>SOLUÇÃO:</u> Derivando em x (e note que $y = y(x)$).

$$\frac{1+y'}{x+y} + \underline{x^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot y' + 2x \cdot y^3} = \frac{2x}{1+(x^2)^2}$$

APOIO: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\quad (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ $\quad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{y'}{x+y} + 3x^2y^2y' + 2xy^3 = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$\boxed{y' = \frac{\frac{2x}{1+x^4} - 2xy^3 - \frac{1}{xy}}{\frac{1}{x+y} + 3x^2y^2}}$$