LISTA 01.

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, e sejam

$$m = \inf\{f(x) : x \in A\} \text{ e } M = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Mostre que

$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

Note que, $\forall x \in A$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Integrando no bloco A, vem:

$$\int_A m\,dx \leq \int_A f(x)dx \leq \int_A M.dx$$

$$m \underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)} \leq \int_A f \leq M. \underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)}$$

$$m.\text{Vol}(A) \leq \int_A f \leq M.\text{Vol}(A) \quad (\div \text{Vol}(A))$$

$$m \leq \frac{\int_A f}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

3. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A, conclua que existe $c \in A$ tal que[1]

$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot \text{Vol}A.$$

Um bloco é compacto, i.e. LIMITADO e FECHADO

Logo, $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função contínua definida no compacto A.

Então, pelo T. de Weierstrass,

$$\exists\ f(x_0) = \min_A f = m$$

$$\text{e } \exists\ f(x_1) = \max_A f = M$$

Assim, temos que

$$f(x_0) \leq \frac{\int_A f}{\text{Vol}(A)} \leq f(x_1)$$

Como f é cont no compacto A, então, pelo T. do valor intermediário (T.V.I.) segue que

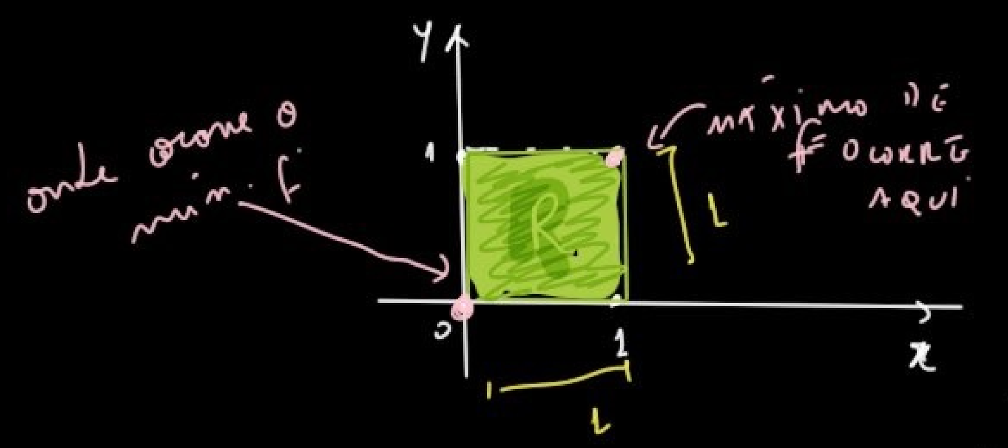
$$\exists\ c \in A \text{ tal que } \quad f(c) = \frac{\int_A f}{\text{Vol}(A)}$$

$$\Rightarrow \int_A f(x)dx = f(c).\text{Vol}(A)$$

4. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 2).

(a) $\int_R\int (x^2+y^2)dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

$f(x,y) = x^2+y^2$



$\mathrm{vol}(R) = \text{ÁREA} = 1^2 = 1.$

$$m = \inf_{x\in R} f(x) = \min_R f = f(0,0) = 0^2+0^2 = 0$$

$$M = \sup_{x\in R} f(x) = \max_R f = f(1,1) = 1^2+1^2 = 2$$

Assim, pelo exercício 2 segue que

$$m \leq \frac{\int_R f}{\mathrm{vol}(R)} \leq M$$

$$0 \leq \frac{\int_R f}{\mathrm{vol}(R)} \leq 2 \iff 0 \leq \frac{\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy}{1} \leq 2$$

$$\iff 0 \leq \iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy \leq 2.$$

6. Justifique por que a bola fechada $B[a,r] \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto J - mensurável.

Pois $\dim(B[a,r]) = m-1.$

Logo, $\mathrm{med}\, B[a,r] = 0.$