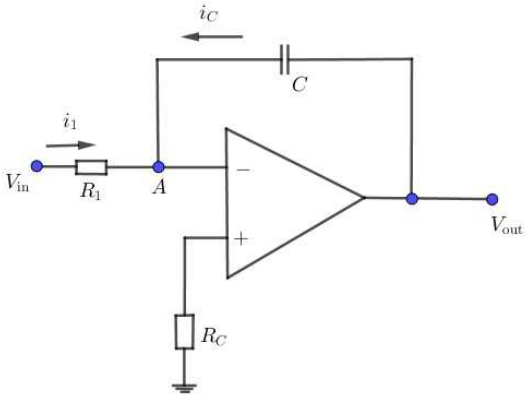
Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turma T2
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Problemas aplicados

1. Considere uma mola com uma das extremidades fixa e suponha que a origem $x = 0$ coincida com a extremidade livre da mola, quando esta se encontra em seu estado normal (não distendida). Se a mola for distendida ou comprimida até que sua extremidade livre se desloque à posição x, a mola exercerá sobre o agente que a deforme uma força cujo valor, em boa aproximação, será
$$\vec{F}(x) = -kx\vec{i} \text{ (lei de Hooke)},$$
onde k é uma constante denomonada *constante elástica* da mola. Suponha que a mola seja distendida e presa na sua extremidade livre uma partícula. Supondo $k = 5$, calcule o trabalho realizado pela mmola quando a partícula se desloca da posição $x = 0,2$ para $x = 0$.
(Resp.: 0,1 J)

2. **(Integração eletrônica)** O integrador eletrônico é um circuito cuja saída é a integral do sinal de entrada. Ou seja,
$$V_{\text{out}}(t) = \int V_{\text{in}}(t)dt,$$
onde $V_{\text{in}}(t)$ é a tensão de entrada, em função do tempo e $V_{\text{out}}(t)$ a tensão de saída em função do tempo. Abaixo é apresentado o esquema de um circuito integrador ideal, utilizando amplificador operacional.



No nó A temos as seguintes igualdades entre as correntes elétricas i_1 e i_C destacadas: $i_1 = -i_C$, onde
$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad \text{e} \quad i_C = -C\frac{dV}{dt},$$
com $V_1 = V_1(t)$ e a resistência R_1 e a capacitância C são constantes.

(a) Com as igualdades acima, mostre que a tensão de saída fica dada por
$$V_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{R_1 \cdot C}\int V_1(t)dt.$$

(b) Para o circuito integrador com amplificador operacional, com resistor $R_1 = 100K\Omega$ e capacitor $C = 0,01\mu F$, calcule a tensão de pico[1] na saída, se a tensão de entrada é dada por $V_{\text{in}} = \frac{1}{2}\text{sen}\,(100t)$.

(c) Ainda para $R_1 = 100K\Omega$ e $C = 0,01\mu F$, escreva a expressão para a saída quando $V_{\text{in}} = 2 + 2\cos 100t$.

[1] A tensão de pico é a altura máxima, em módulo, do gráfico da função.

3. Se a aceleração de uma partícula que se move com velocidade variável v é $-kv^2$, onde k é uma constante e se v_0 é a velocidade quando $t = 0$, mostre que

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

4. De acordo com a lei da gravitação de Newton, duas partículas quaisquer de massas M e m se atraem com uma força F cuja grandeza é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre elas, ou seja,

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

onde G chama-se *constante de gravitação.* Se M está fixado na origem, qual o trabalho exigido para mover m de $r = a$ para $r = b$, onde $a < b$? Obs.: O *elemento de trabalho* é dado por $dW = Fdr$. (Resp.: $W = GMm(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$).

5. A resistência do ar de um automóvel, dentro de certos limites de velocidade, é proporcional à velocidade. Assim, se F é a força líquida gerada pelo motor, temos

$$M\frac{dv}{dt} = F - kv.$$

Exprima a velocidade em termos de t, sabendo que $v = 0$ quando $t = 0$.
(Resp.: $v = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{M}})$)

6. **(Decaimento radioativo)** Se N é o número de átomos radioativos presente num certo material em um instante de tempo t, então, a equação que descreve o decaimento é dada por

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

que estabelece que a variação de caimento do material radioativo em relação ao tempo é proporcional à massa de material radioativo no referido instante de tempo, onde λ é a constante de decaimento. Se N_0 é o número de átomos radioativos no instante inicial $t = 0$ e N é o número de átomos no instante t, mostre que a equação acima determina $N = N_0e^{-\lambda t}$.

7. **(Plutônio 239)** A meia-vida do isótopo do plutônio é de 24360 anos. Se 10 g de plutônio forem lançados na atmosfera por um acidente nuclear, quantos anos levará para que 80% do isótopo decaia?

8. **(Reações químicas de Primeira Ordem)** Em algumas reações químicas, a taxa à qual a quantidade de uma substância varia em relação ao tempo é proporcional à quantidade presente. Para a transformação da δ-glucono lactona em ácido glucônico, por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y,$$

onde t é medido em horas. Se houver 100 g de δ-glucono lactona presentes quando $t = 0$, quantos gramas restação depois da primeira hora? (Resp.: 54,88 g)

9. **(Voltagem de um capacitor sendo descarregado)** Suponha que as cargas elétricas acumuladas em um capacitor estejam escapando astravés de seus terminais a uma taxa proporcional à voltagem V e que, se t for medido em segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Encontre V nessa equação, usando a notação V_0 para denotar o valor de V quando $t = 0$. Quanto tempo a voltagem demorará para atingir 10% de seu valor inicial?

10. Seja K a constante de equilíbrio para a formação de CO_2 e H_2 a partir de CO e H_2O para uma dada temperatura T. Da Termodinâmica sabe-se que

$$\frac{d}{dT}\ln K = \frac{\Delta H^*}{RT^2}.$$

Assumindo que ΔH^* independa da temperatura, integre a equação acima para mostrar que $\ln K$ varia com a temperatura T. (Resp.: $\ln K = -\frac{\Delta H^*}{RT} + c$)

11. Em eletroqímica a equação de Cottrell

$$I = n \cdot F \cdot Ac\sqrt{\frac{D}{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}$$

descreve a corrente I no instante de tempo t depois de um eletrodo estar imerso em uma solução. A corrente I é definida como a variação da carga Q em relação ao tempo, ou seja, $I = \frac{dQ}{dt}$. Use isto para encontrar uma expressão para a carga.

12. A força entre duas partículas é modelada por

$$F = \frac{12\varepsilon}{a_0}\left[\left(\frac{a_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{a_0}{r}\right)^{7}\right].$$

Sabendo que a força é a derivada negativa do potencial , ou seja, que $F = -\frac{dU}{dr}$, obtenha a fórmula para o potencial U entre as duas partículas, sabendo que quando $r = a_0$ tem-se $U = -\varepsilon$.