

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Cursos de Computação e Químicas

Lista 03 de Exercícios - Funções trigonométricas. Limites de funções.

1. Esboçar o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio, imagem e período.

a) $f(x) = 1 + 2 \sin \left(2x - \frac{5\pi}{3} \right)$

d) $f(x) = \csc \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$

b) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

e) $f(x) = |1 - 2 \cos x|$

c) $f(x) = \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

f) $f(x) = 1 - 2 \sec \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

2. Sejam as funções $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ e $g : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, +\infty)$ dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$g(x) = 2 \ln \csc x$$

Construa o gráfico de $h = f \circ g$, indicando domínio e imagem. h é periódica? h é bijetiva?

3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - \frac{4\pi}{3}$ e $g(x) = 1 + 2 \sin x$. Esboçar o gráfico de $g \circ f$, indicando domínio e imagem.

4. Usando a definição de limite, prove que

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

5. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow 3} x f(x) = 12$, então existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e é igual a 4.
6. Dê um exemplo em que $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ existe mas nem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e nem $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existem.
7. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

8. Considere a *função de Dirichlet* $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

Afirmamos que $\forall a \in [0, 1]$, $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Por quê?

9. Calcule cada limite a seguir, se existir¹:

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ | (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 5x - 6}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ |
| (j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$ | (k) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1} - 1}$ |
| (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x^2 - 1}$ | (n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x^2-3} - \sqrt[4]{x-1}}{x^2 - 4}$ | (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 11}{1 - x - 5x^2}$ |
| (p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 7x + 2}{2x^2 - 14x + 8}$ | (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 11}{1 - 7x}$ | (r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{3 - 5x^3 - 2x^7}$ |
| (s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ | (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x$ | (u) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x - 2}$ |
| (v) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{2+x}{3x-1}$ | (x) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{ x-1 }$ | (y) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+a} - \sqrt{x}$ |

10. Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 - \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, indicando domínio e imagem. Pelo gráfico, o que se conclui quanto aos limites $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^-} f(x)$?

11. Supondo que vale a seguinte cadeia de desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

prove que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

12. Seja f uma função tal que para todo $x \neq 0$, $-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique.

13. Suponha que para todo x , $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

14. Dada a função f em cada item, faça o seu esboço gráfico e ache o limite indicado, justificando sua existência ou não.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 8 - 2x, & \text{se } x > 2. \end{cases}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

¹Respostas:

- (a) 27 (b) -2 (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{a-1}{3a^2}$ (f) na^{n-1} (g) $\frac{1}{4}$ (h) $-\frac{1}{56}$ (i) $\frac{1}{4}$ (j) $-\frac{1}{3}$ (k) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
 (l) $\frac{1}{3}$ (m) $\frac{1}{24}$ (n) $\frac{1}{4}$ (o) $-\frac{3}{5}$ (p) $-\infty$ (q) $-\infty$ (r) 0 (s) 0 (t) $-\frac{5}{2}$ (u) $+\infty$ (v) $-\infty$
 (x) -1 (y) 0

15. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq -2 \\ ax + b, & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, ache os valores de a e b tais que existam os limites $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

16. Dados $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \end{cases}$

- (a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe.
- (b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ não existe.
- (c) Ache as fórmulas que definem $f(x)g(x)$.
- (d) Prove que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ existe, mostrando que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x)$.