LISTA 03 –

6. Dê um exemplo em que $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ existe mas nem $\lim_{x\to 0} f(x)$ e nem $\lim_{x\to 0} g(x)$ existem.

Obs.: Vimos em aula:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

↳ admitindo que existem os limites individuais.

Tome $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Neste caso, $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

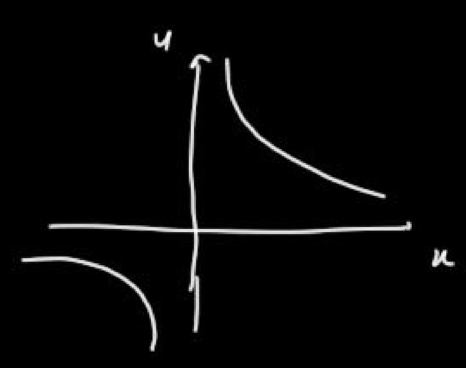
Porém, temos:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta} = +\infty$, $\delta>0$, $x = 0+\delta$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \lim_{\delta\to 0} -\frac{1}{\delta} = -\infty$, $x = 0-\delta = -\delta$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$



$\nexists$

Do mesmo modo, teremos:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \nexists$$

09) (ℓ) $\lim_{x\to -2}\frac{1-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1}-1}$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(1-\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x^2+x-1}-1)}\cdot\frac{(1+\sqrt{x+3})}{1+\sqrt{x+3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x-1}+1}{(\sqrt{x^2+x-1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{[1-(\sqrt{x+3})^2]\cdot(\sqrt{x^2+x-1}+1)}{[(\sqrt{x^2+x-1})^2-1]\cdot(1+\sqrt{x+3})} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(1-x-3)(\sqrt{x^2+x-1}+1)}{(x^2+x-1-1)\cdot(1+\sqrt{x+3})} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)(\sqrt{x^2+x-1}+1)}{(x^2+x-2)(1+\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to -2}\frac{-\cancel{(x+2)}(\sqrt{x^2+x-1}+1)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)(1+\sqrt{x+3})} \;(\equiv)$$

$x-(-2)$

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x+2 \\ \hline -x-2 & 1 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x+2 \\ \hline -x^2-2x & x-1 \\ -x-2 & \\ +x+2 & \\ 0 & \end{array}$$

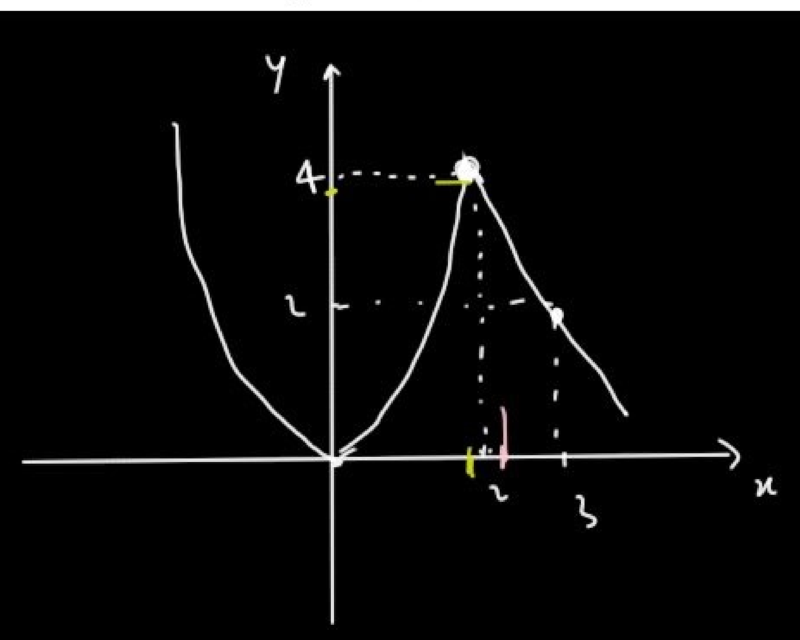
$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

$$(\equiv)\; \lim_{x\to -2} -\frac{\sqrt{x^2+x-1}+1}{(x-1)\cdot(1+\sqrt{x+3})} = -\frac{\sqrt{(-2)^2-2-1}+1}{(-2-1)(1+\sqrt{-2+3})} = -\frac{\cancel{2}}{(-3)\cdot\cancel{2}} = \frac{1}{3}$$

L3

14. Dada a função f em cada item, faça o seu esboço gráfico e ache o limite indicado, justificando sua existência ou não.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 2 \\ 8 - 2x, \text{ se } x > 2. \end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, (iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

12. Seja f uma função tal que para todo $x \neq 0$, $-x^2 + 3x \leq f(x) < \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

solução:

$$\lim_{x\to 1} (-x^2+3x) \leq \lim_{x\to 1} f(x) \leq \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1} (-x^2+3x) = -(1)^2 + 3\cdot(1) = -1+3 = 2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Logo, pelo T. do Sanduíche, segue que

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 2}$$

09) (m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$ — note que agora temos uma raiz CÚBICA

PROPRIEDADE:

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 + a^{n-4}\cdot b^3 + \dots b^{n-1})$$

$(a - b)(a^2 + a.b + a^0 b^2)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)\left((\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7}\cdot 2 + (\sqrt[3]{x+7})^0\cdot 2^2\right)}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\left((\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7}\cdot 2 + \underbrace{(\sqrt[3]{x+7})^0}_{=1}\cdot 2^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\cancel{\sqrt[3]{x+7}})^3 - (2)^3}{(x+1)(x-1)\cdot\left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x+7-8}^{\,x-1}}{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}\left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)\cdot\left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4\right)} = \frac{1}{2\cdot(4+4+4)} = \frac{1}{24} //$$

LISTA 04

4. Com ajuda dos limites laterais e no infinito, esboçar os gráficos das seguintes funções, indicando domínio e imagem:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{3-2x}{9-x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$ (f) $f(x) = \left|\dfrac{2x-5}{x^2-1}\right|$

$D(f) = ?$ $2x-1 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ — ASSÍNTOTA VERTICAL.

zeros: $f(x) = 0 \Leftarrow \dfrac{x}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

O que ocorre com o gráfico de f perto de $x = \frac{1}{2}$?

$\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}+\delta}{2\cdot\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-1} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\frac{1}{2}+\delta}{\cancel{1}+2\delta-\cancel{1}} = \frac{\frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$

$\delta > 0$. $x = \frac{1}{2}+\delta$

$\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x}{2x-1} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}-\delta}{2\left(\frac{1}{2}-\delta\right)-1} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\frac{1}{2}-\delta}{\cancel{1}-2\delta-\cancel{1}} = \frac{\frac{1}{2}}{0^-} = -\infty$

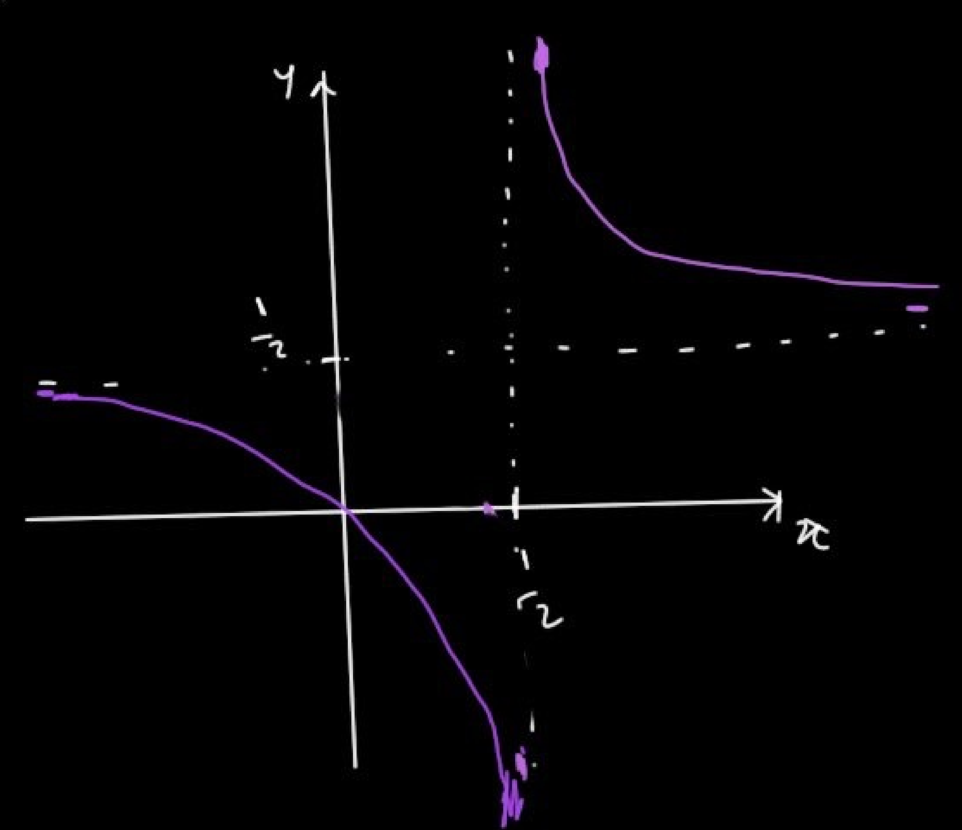
$\delta > 0$ $x = \frac{1}{2}-\delta$

Além disso, temos:

$\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$ — ASSÍNTOTA HORIZONTAL

Esboço gráfico:



$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$