Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Química e Computação
Primeira Prova de Cálculo 2
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 28/11/2023

Questão 01. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } \ 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{se } \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Esboce o gráfico da f e calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ das seguintes formas:

(a) [0,5pt] de acordo com a Geometria Plana, i.e., calculando a área da figura subentendida;

(b) [1,0pt] de acordo com a definição de integral definida;

(c) [0,5pt] usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Questão 02. [1,0pt] Determine a função F a partir da f do exercício anterior, apresentando seus esboços gráficos num mesmo plano cartesiano. Dê a interpretação geométrica de F. Marque nos gráficos de F e f o significado de $F(\frac{3}{2})$.

Questão 03. [1,0pt] Determine a derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{1-3x}^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt$.

Questão 04. [1,0pt] Justifique por que $\displaystyle\int_0^1 x\,dx \geq \int_0^1 x^2 dx$ e por que $\displaystyle\int_1^2 x\,dx \leq \int_1^2 x^2 dx$ (sem calcular as integrais).

Questão 05. Calcule cada uma das integrais indefinidas abaixo: [0,7pt cada]

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2x}{6-5x^2} \right) dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sec 2\varphi \tan 2\varphi \, d\varphi}{(4 - \sec 2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\csc x \sqrt[3]{\cos x}}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$ (e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 3}$ (f) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}} \sec^2 e^{\sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}}$

Questão 06. [1,0pt] Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$.

—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o

EXTRA[1] [4,0pt] Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0, 1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$

[1] Esta questão pode ser feita, para substituir questões que somem 4,0 pontos da prova.