06/12/23 — AULA 09

MUDANÇA GERAL DE VARIÁVEIS NO $\mathbb{R}^2$:

Dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável no conj. J-mensurável Ω. Pode acontecer que $\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ torne-se muito difícil (ou até mesmo impossível), dependendo da região Ω. A ideia então, para resolver o problema, consistirá em transformar a região Ω numa região Ω' mais simples, e isto é feito efetuando uma mudança de variável.

O estudo feito na aula passada, para transformar o problema em coordenadas polares, já foi uma mudança de variável. O que faremos agora será um procedimento mais geral, o qual o caso em coordenadas polares será um caso particular.

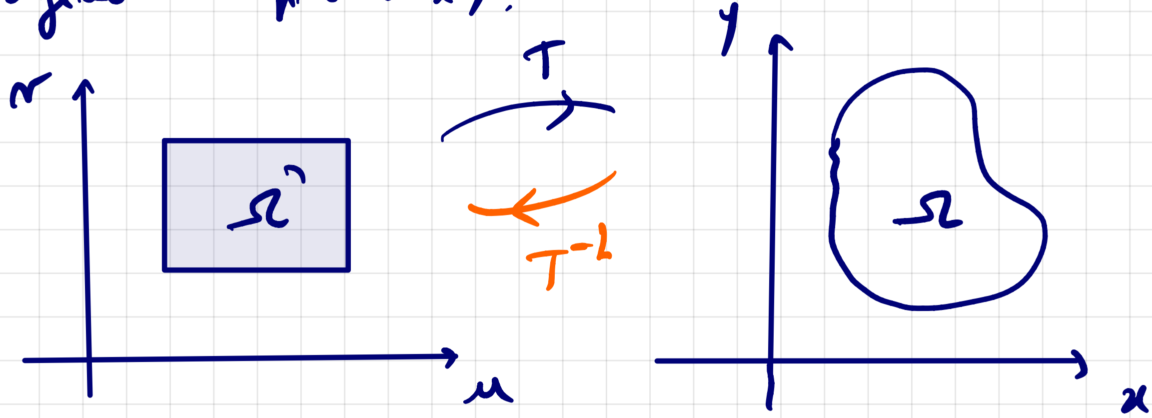
Seja $T : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to T(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ uma transformação injetiva, de classe C^1 - (ou seja, com derivadas parciais contínuas), dada por:

$$T(u,v) = (x,y), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

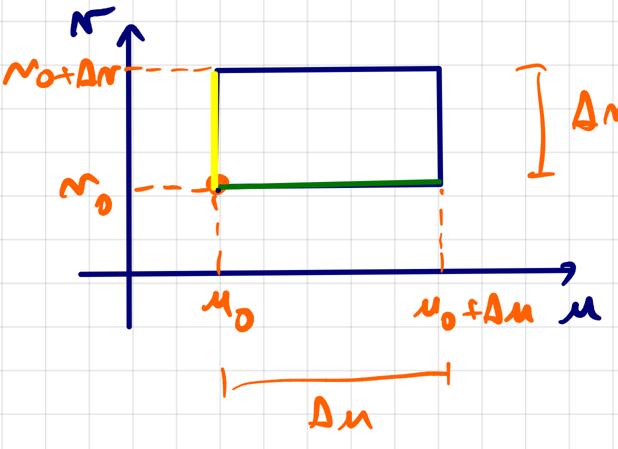
Note que T, por construção, é bijetiva.

T transforma uma região do plano uv para uma região no plano xy.

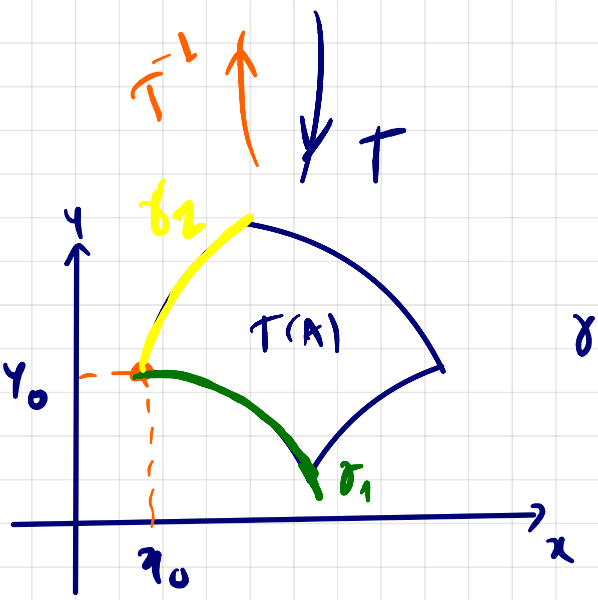


NESTA ILUSTRAÇÃO, T^{-1} TRANSFORMA Ω em Ω'.

Seja A um retângulo no plano uv, de lados Δu e Δv; e considere o ponto (u_0, v_0) sendo o canto inferior esquerdo de A.



Aplicando a T, A é transformada na região $T(A)$ no plano xy



Define as curvas γ_1, γ_2 por:

$$\gamma_1 : [u_0, u_0 + \Delta u] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_1(u) = T(u, v_0) = \big(x(u, v_0), y(u, v_0)\big),$$

e

$$\gamma_2 : [v_0, v_0 + \Delta v] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

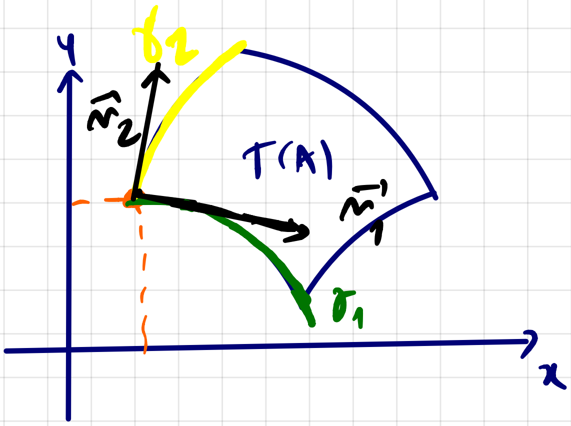
$$\gamma_2(v) = T(u_0, v) = \big(x(u_0, v), y(u_0, v)\big)$$

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ os vetores tangentes à γ_1 e γ_2, respectivamente, no ponto $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$:

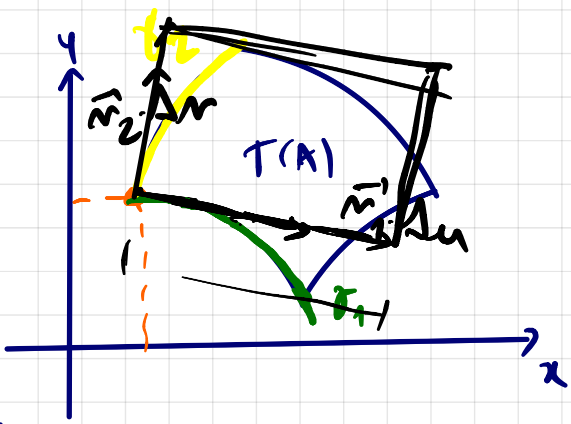
$$\vec{v}_1 = \gamma_1'(u_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\right)$$

e

$$\vec{v}_2 = \gamma_2'(v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$



Vamos considerar, como uma aproximação para $T(A)$ o retângulo de dimensões $\vec{v}_1 \cdot \Delta u$ e $\vec{v}_2 \cdot \Delta v$.



A área desse paralelogramo é dada por:

$$A = \| \vec{v}_1 \cdot \Delta u \times \vec{v}_2 \Delta v \| = \| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \| \cdot \Delta u \cdot \Delta v =$$

$\Delta u, \Delta v > 0.$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \right\| . \Delta u . \Delta v$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \vec{k} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \vec{k} \right| . \Delta u . \Delta v$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right| . \Delta u . \Delta v$$

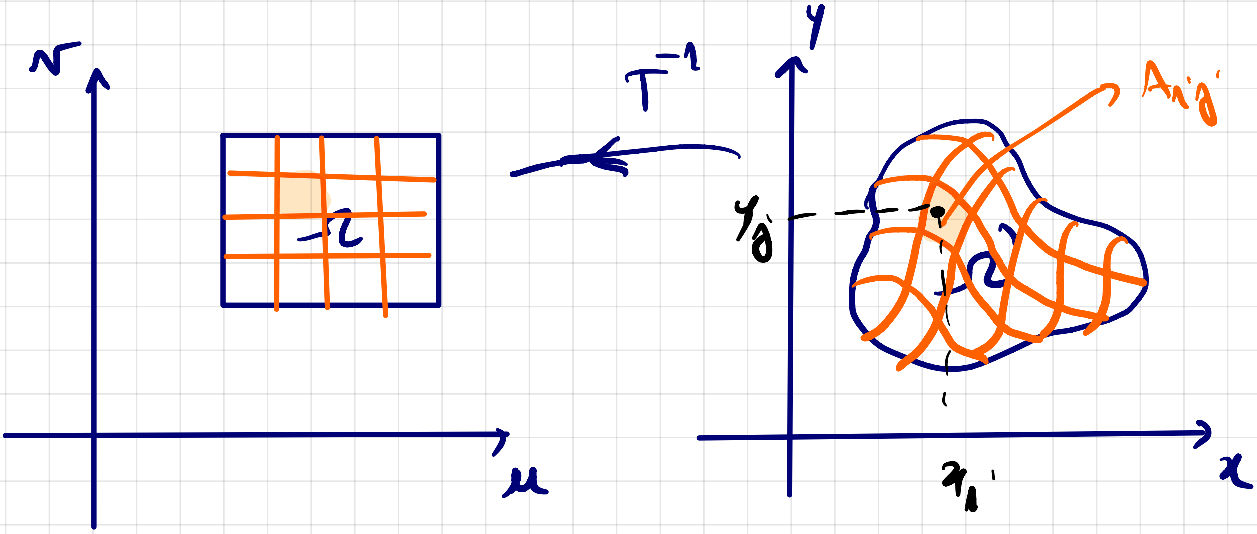
$$= \underbrace{\left| \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{J(T)(u,v)} \right|}_{\det(J(T))(u,v)} . \Delta u \Delta v = \det(J(T)(u,v)) . \Delta u . \Delta v$$

$$A = \left| \det(J(T)(u,v)) \right| . \Delta u . \Delta v$$

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável.

e seja $T : \Omega \to T(\Omega)$, injetiva e de classe C^1, dada por

$$T(u,v) = (x,y)$$



Seja P uma partição em Ω. Em Ω' teremos a partição P', mediante T, c.f. acima desenhado.

A soma de Riemann de f em Ω' será dada por; $\forall (x_i, y_j) \in A_{ij}$ (onde A_{ij} é um sub-bloco)

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) . A_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \cdot \det(J(T)(u,v)) \cdot \Delta u_i \Delta v_j$$

Tomando o limite com $\|P\| \to 0$, obtemos:

$$\boxed{\iint_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega} f(x(u,v),\, y(u,v))\,\left|\det(J(T)(u,v))\right|\,du\,dv}$$

FÓRMULA GERAL DE MUDANÇA DE VARIÁVEL.

EXEMPLOS:

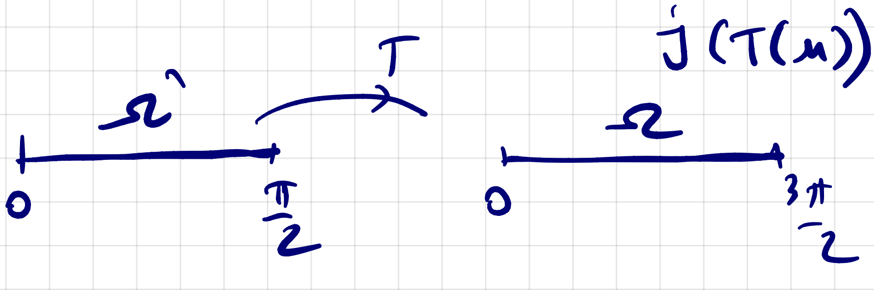
01) No cálculo I já fazíamos essa mudança. (e nem sabíamos disso!)

Ex: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,dx =$ $\quad u = 3x = T(x)$

$\hookrightarrow x = \frac{1}{3}u$

$J(T(u)) = x' = \frac{1}{3}$

$|\det(J(T(u)))| = \frac{1}{3}$



$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{3\pi}{2}$

$$\int_{\Omega'} f(x)\,dx = \int_{\Omega} f(u(x)).\left|\det J(T(u))\right|.du$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos u.\left|\frac{1}{3}\right|.du = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen} u \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 \right) = \frac{1}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}$$

02) MUDANÇA EM COORDENADAS POLARES:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) \cdot |\det(J(T)(\rho,\theta))| \cdot d\rho\, d\theta,$$

onde $J(T)(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$

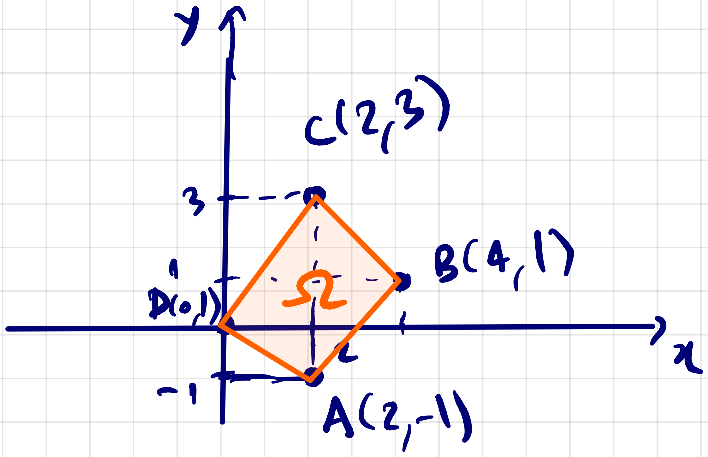
$$= \rho \cdot \cos^2\theta - (-\rho \operatorname{sen}^2\theta) = \rho \, (\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1}) = \rho$$

Logo:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \cdot \rho \, d\rho\, d\theta.$$

03) $\iint_\Omega (x-y)^2 \cdot \ln(x+y)\,dx\,dy$, onde Ω

é o quadrilátero de vértices $A(2,-1)$; $B(4,1)$; $C(2,3)$ e $D(0,1)$.



Solução:

Escreve

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

$+$

$u+v = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v}$

$\Rightarrow y = v - x = v - \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right)$

$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v}$

$$\det J(T)(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

$-$ $\quad$ $+$

$$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Transformando Ω em Ω' mediante T:

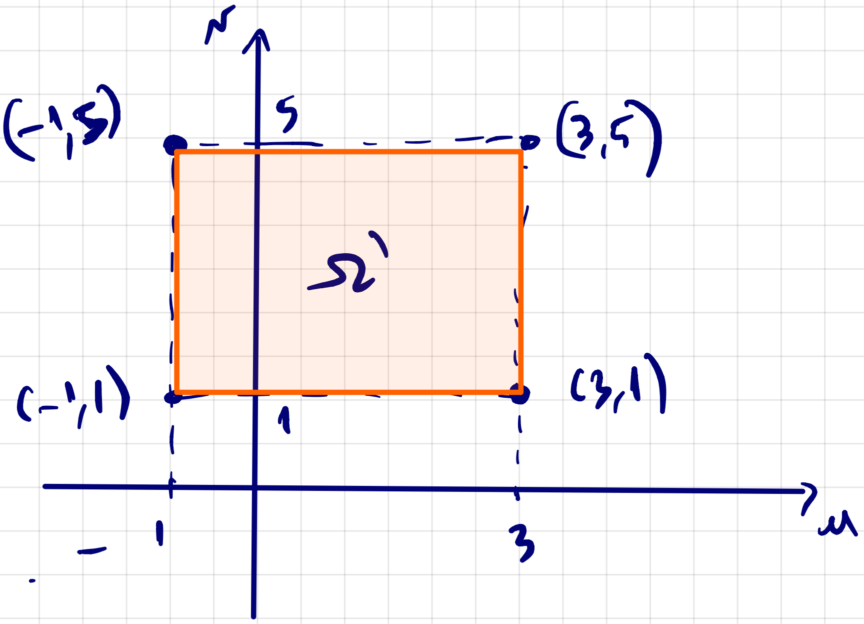
$$(x,y) \xrightarrow{T} (u = x-y,\ v = x+y)$$

- $A(\underset{x}{2},\underset{y}{-1}) \xrightarrow{T} (2+1,\ 2-1) = T(A) = (3,1)$

- $B(4,1) \xrightarrow{T} (4-1,\ 4+1) = T(B) = (3,5)$

- $C(2,3) \xrightarrow{T} (2-3,\ 2+3) = T(C) = (-1,5)$

- $D(0,1) \xrightarrow{T} (0-1,\ 0+1) = T(D) = (-1,1)$



Assim, temos:

$$\iint_{\Omega} (x-y)^2 \ln(x+y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega'} u^2 . \ln v \left|\frac{1}{2}\right| . du\, dv$$

$$= \int_{u=-1}^{u=3} \int_{v=1}^{v=5} \frac{1}{2} u^2 \ln v \, du\, dv =$$

$$\frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=3} u^2\,du \cdot \int_{r=1}^{r=5} \ln r \cdot dr \Leftrightarrow$$

$$\int \ln r\,dr = \int u\,dw = u.w - \int w\,du$$

integral por partes

$$\begin{cases} u = \ln r \Rightarrow du = \dfrac{dr}{r} \\ dw = 1\,dr \Rightarrow w = r \end{cases}$$

$$\int \ln r\,dr = r.\ln r - \int \cancel{r}\,\frac{dr}{\cancel{r}}$$

$$= r\ln r - r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_1^3 \cdot (r\ln r - r)\Big|_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(5\ln 5 - 5 - [1\,\overbrace{\ln 1}^{=0} - 1]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{26}{3}\cdot(5\ln 5 - 5 + 1) = \frac{13}{3}(5\ln 5 - 4)$$