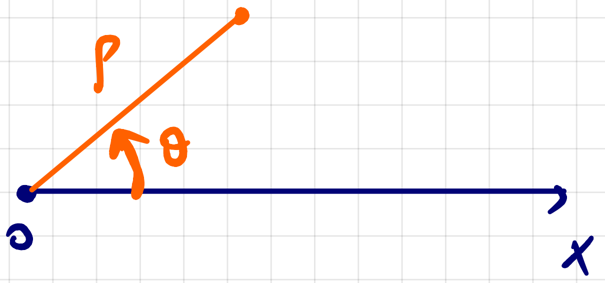
01/12/23 – AULA 08

INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES:

O sist. de coordenadas polares $\rho\theta$ é um sistema formado por uma semi-reta orientada OX, onde a marcação de um ponto $P(\rho, \theta)$ fica definida por um raio vetor ρ, marcado a partir da origem O da semi-reta, de inclinação θ, no sentido anti-horário, como na Trigonometria.



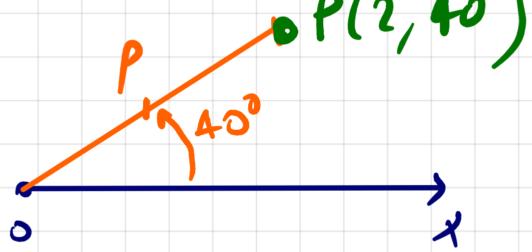
$P(\rho, \theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

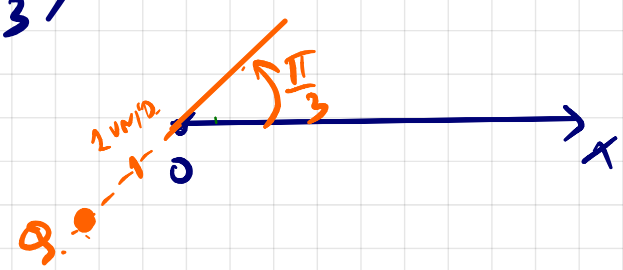
$\rho \in \mathbb{R}$

Se $\rho < 0$, a marcação é feita pelo PROLONGAMENTO de $|\rho| > 0$.

Ex.: $P(2, 40^\circ)$



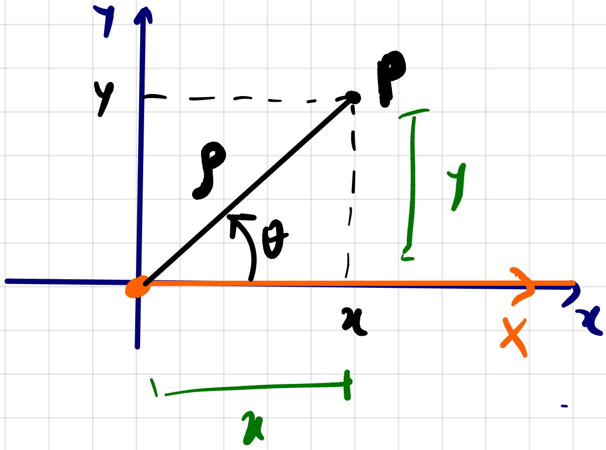
$Q\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$ → Obs.: POR SIMETRIA, PODERÍAMOS ESCREVER $Q(1, -300^\circ)$



CONVERSÃO SISTEMAS POLAR ⟷ RETANGULAR:

Sejam os sistemas cartesiano xy e polar $\rho\theta$, com eixos OX e origens coincidindo.

Dado um ponto $P(x,y)$, temos, pelo T. de Pitágoras:



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$$

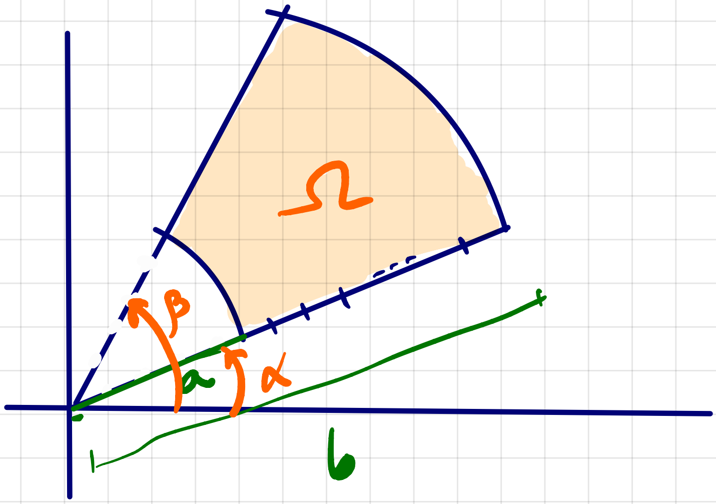
Além disso temos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta &= \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cdot \cos\theta \end{aligned}\right\} \text{RELAÇÕES DE CONVERSÃO.}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

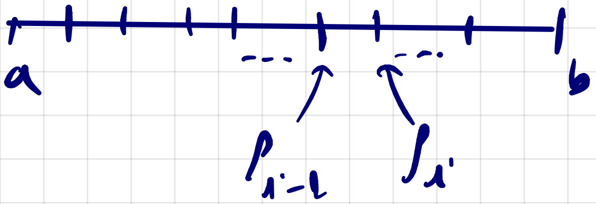
INTEGRAIS DUPLAS: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável, onde Ω é uma região delimitada por circunferências ou arcos de circunferência. Seja, então, Ω dada por:

$$\Omega = \{(\rho,\theta): \ a \le \rho \le b; \ \alpha \le \theta \le \beta\}$$



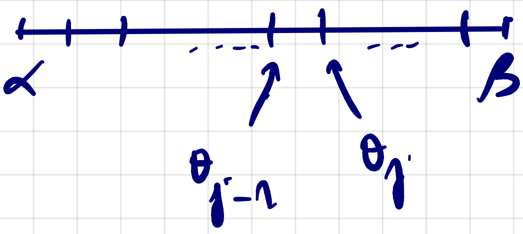
O sistema de coordenadas polares é melhor de ser usado nestes casos.

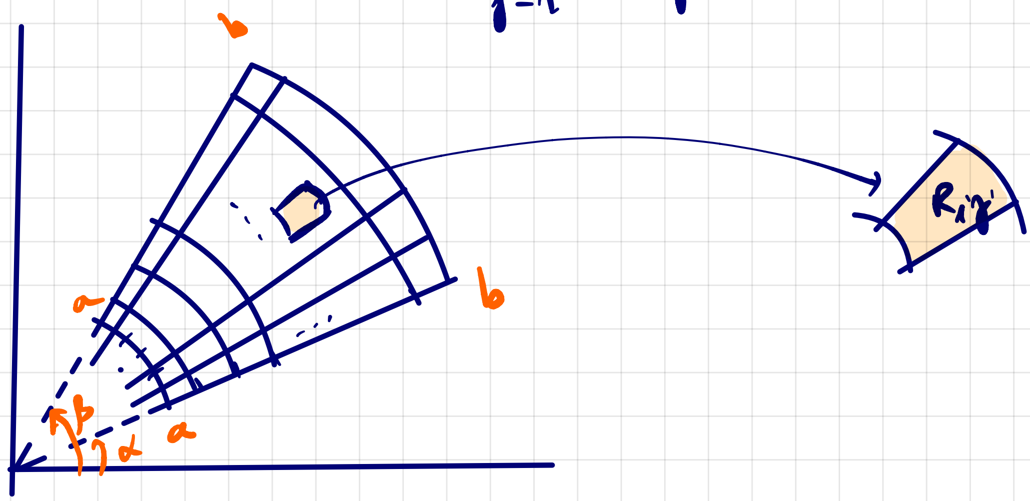
Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição de Ω, onde P_1 é partição de $[a,b]$, dividindo-o em m subintervalos da forma $[\rho_{i-1}, \rho_i]$: (regular)



;

e P_2 é partição regular de $[\alpha, \beta]$, dividindo-o em n subintervalos da forma $[\theta_{j-1}, \theta_j]$:





Esta partição divide Ω em subregiões

De forma como R_{ij}...

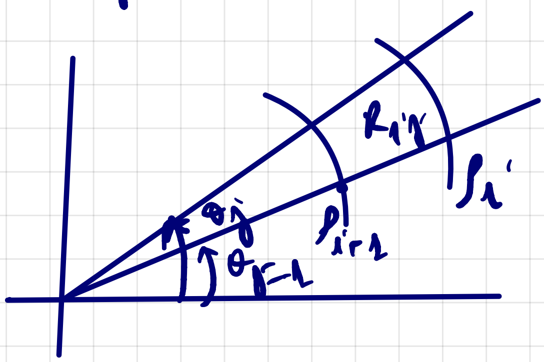
Vamos determinar a área de R_{ij}

Seja (ρ_i^*, θ_j^*) o ponto médio em R_{ij}, onde

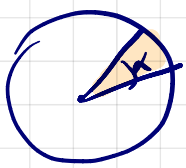
$$\rho_i^* = \frac{\rho_{i-1}+\rho_i}{2} \quad ; \quad \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}$$

A área A_{ij} do setor R_{ij} será dada por,

$$A_{ij} = A_{setor\ maior} - A_{setor\ menor}.$$



Obs.:



2π —— πR^2

α —— A_{setor}

$$A_{setor} = \frac{\alpha \pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2}\alpha R^2$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\cdot(\theta_j - \theta_{j-1})\cdot \rho_i^2 - \frac{1}{2}\cdot(\theta_j - \theta_{j-1})\cdot \rho_{i-1}^2$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_j - \theta_{j-1})\cdot\left[\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2\right]$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\underbrace{(\theta_j - \theta_{j-1})}_{\Delta\theta}\cdot\underbrace{(\rho_i - \rho_{i-1})}_{\Delta\rho}\cdot(\rho_i + \rho_{i-1})$$

ρ_i^*

$$\Rightarrow \boxed{A_{ij} = \rho_i^* \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\theta}$$

Seja D^* a decomposição $D^*(P\,;\, f(x_i, y_j))$

Assim, a soma de Riemann de f em relação a esta decomposição será:

$$\sum_{i,j} f(x_i^*, y_j^*) \cdot \overbrace{Vol(R_{ij})}^{= A_{ij}}$$

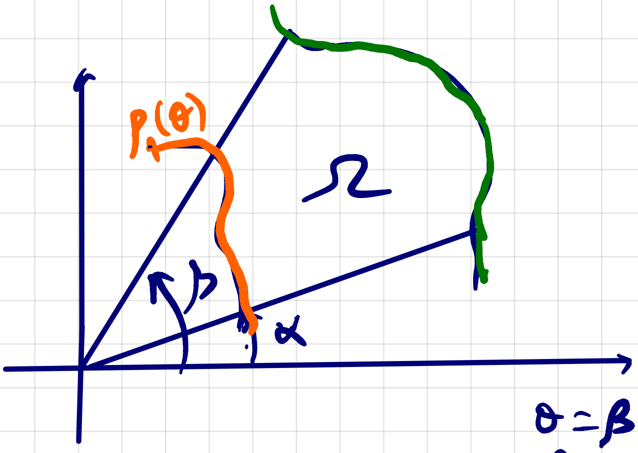
Então:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\|D^*\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \cdot A_{ij}$$

$$= \lim_{\|D^*\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\rho_i^* \cos\theta_j^*, \rho_i^* \,\mathrm{sen}\,\theta_j^*) \cdot \rho_i^* \Delta\rho \Delta\theta$$

$$= \int_{\rho=a}^{\rho=b} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta .$$

Obs.: Podemos ter um resultado mais geral:



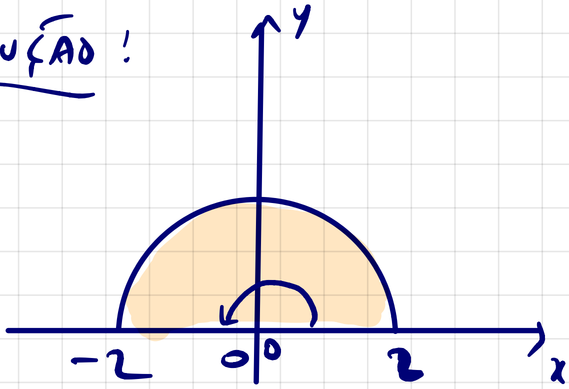
$$\iint_\Omega f = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{\rho=\rho_1(\theta)}^{\rho=\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)\cdot\rho\, d\rho\, d\theta$$

EXEMPLOS: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, onde Ω é dada

pelo semi-círculo $x^2+y^2=4$, no 1º e 2º quadrantes.

SOLUÇÃO:



$$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=2} \frac{\rho\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{\rho}}\,\cancel{\rho}\, d\rho\, d\theta$$

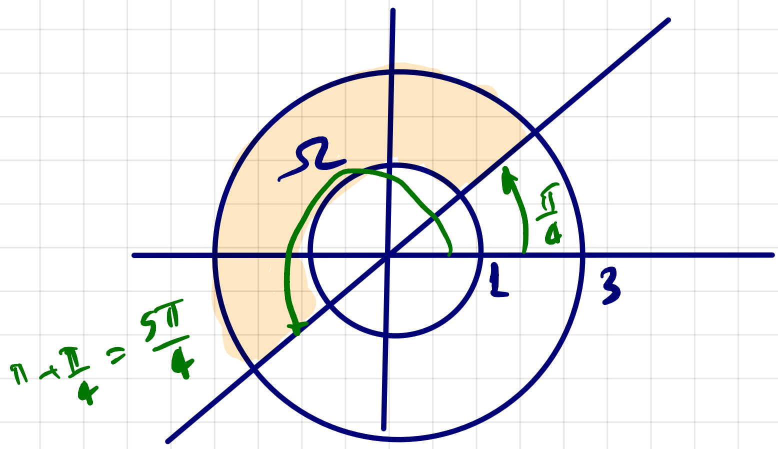
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} \rho \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=2} \rho \, d\rho = \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi} \right) \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{2} \right) =$$

$$= (-\cos\pi + \cos 0) \cdot (2 - 0) = 4$$

(b) $\iint_{\Omega} (x-y) \, dx \, dy$, onde Ω é a região:

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq y \}$$



Logo, obtemos:

$$\iint_{\Omega} (x-y) \, dx \, dy = \int_{\rho=1}^{\rho=3} \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} (\rho\cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta) \rho \cdot d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\rho=1}^{\rho=3} \rho^2 d\rho \cdot \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

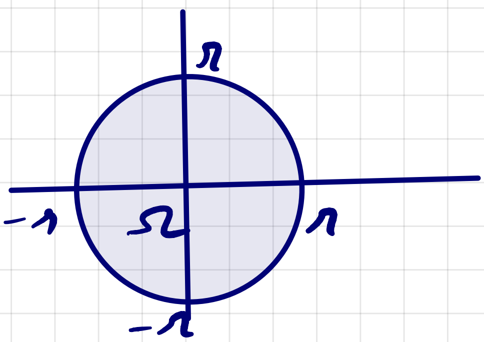
$$\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{3} \cdot \left(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right)\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} =$$

$$\left(9 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{26}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{26}{3} \cdot (-2\sqrt{2}) = -\frac{52}{3}\sqrt{2}$$

LISTA 02

09) (a) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = ?$



$x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\rho=0}^{\rho=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\rho=0}^{\rho=R} e^{-\rho^2}(-2\rho)\,d\rho\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^R\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$\int e^{r}\,dr = e^{r}+c$$

$$r = -\rho^2$$

$$\hookrightarrow dr = -2\rho\,d\rho$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-R^2}-e^{0}\right)\cdot(2\pi-0)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(e^{-R^2}-1\right)\cdot\cancel{2}\pi$$

$$= -\pi\left(e^{-R^2}-1\right)$$

$$= \pi\cdot\left(1-e^{-R^2}\right)$$

PARA ENTREGAR NA PRÓXIMA QUARTA.

LISTA 02. exercício 12.

mauricio.zahn@gmail.com.