CÁLCULO IV

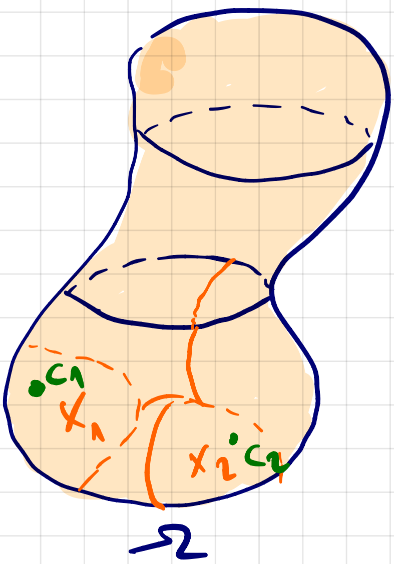
13/12/23 – AULA 11

INTEGRAIS TRIPLAS:

Seja $w = f(x,y,z)$ uma função de 3 variáveis reais definida no conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, com Ω sendo J-mensurável.

Seja $D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma decomposição de Ω, i.e., $\text{int}(X_i \cap X_j) = \emptyset$; X_i - J mensurável, $\forall i$, tal que

$$\Omega = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n .$$



Sejam $c_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Disso, montamos a seguinte soma de Riemann, considerando a decomposição pontilhada

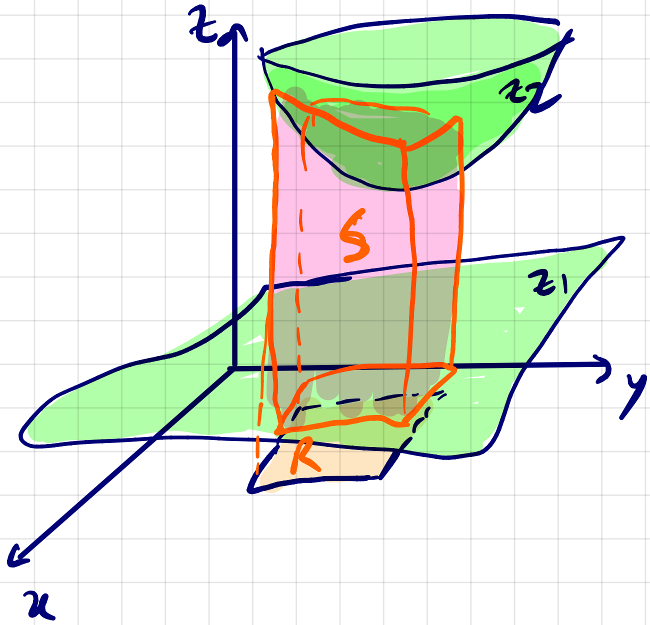
$$\Sigma(f; D^*):$$

$$\Sigma(f; D^*) = \sum_i f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i).$$

Assim, a integral de f em Ω é dada pelo limite dessa soma quando $\|D\| \to 0$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_i f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i)$$

Na prática uma integral tripla costuma ser decomposta em uma integral dupla e uma integral simples. Isto porque a região de integração Ω, sendo agora no $\mathbb{R}^3$, costuma ficar limitada por duas superfícies, por exemplo, z_1 e z_2



$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_R dx\,dy \cdot \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz}_{F(x,y)}$$

Uma integral tripla, do mesmo modo que uma integral dupla, pode ser calculada via de integrais iteradas.

Ex.: LISTA 03. 04_c) :

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^y \, dx\,dz\,dy = \int_{y=0}^{y=3} \int_{z=0}^{z=1} z \cdot e^y \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-z^2}} dx \right) dz\,dy =$$

y z $x=0$

$$= \int_{y=0}^{y=3} \int_{z=0}^{z=1} z\, e^y \cdot x \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{1-z^2}} \cdot dz\, dy = \int_{y=0}^{y=3} \int_{z=0}^{z=1} z \cdot e^y \cdot \sqrt{1-z^2} \cdot dz\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=3} e^y \left(-\frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=1} (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2z)\, dz \right) dy =$$

$\int u^k du$

$u = 1 - z^2 \Rightarrow du = -2z\,dz$

$$= -\frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=3} e^y \cdot \frac{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{z=0}^{z=1} \cdot dy = -\frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=3} e^y \cdot \left(0 - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) dy$$

$$= +\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \int_{y=0}^{y=3} e^y dy = \frac{1}{3} \cdot e^y \Big|_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{3} \cdot (e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

O volume V da região Ω é dado por

$$V = \mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega dV$$

De fato, sendo Ω - J-mensurável, então; sendo $A \subset \mathbb{R}^3$ um bloco (no caso, paralelepípedo), tal que $\Omega \subset A$, então, da teoria (aula 04) tem-se que

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_A \xi_\Omega(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

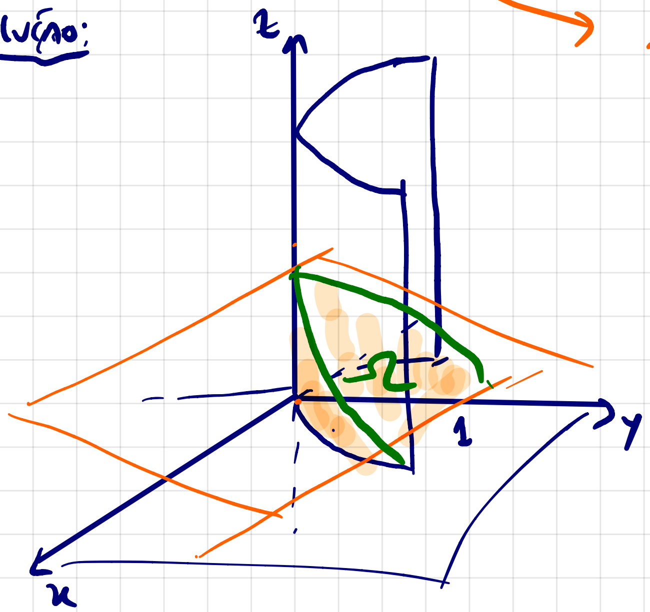
$$= \iiint_\Omega \underbrace{\xi_\Omega(x,y,z)}_{1}\,dx\,dy\,dz + \int_{A\setminus\Omega} \underbrace{\xi_\Omega(x,y,z)}_{=0}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz.$$

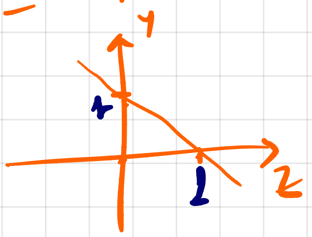
EXEMPLOS:

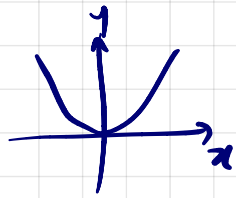
01) LISTA 03, QUESTÃO 07: Use integral tripla para determinar o volume do sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

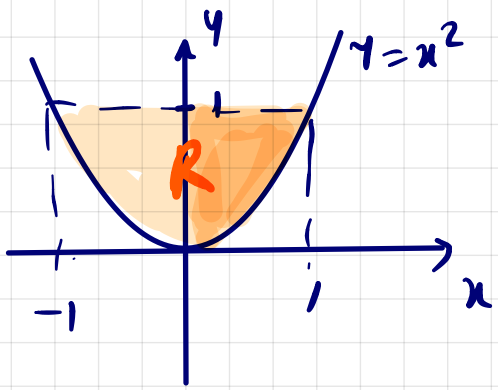
SOLUÇÃO:



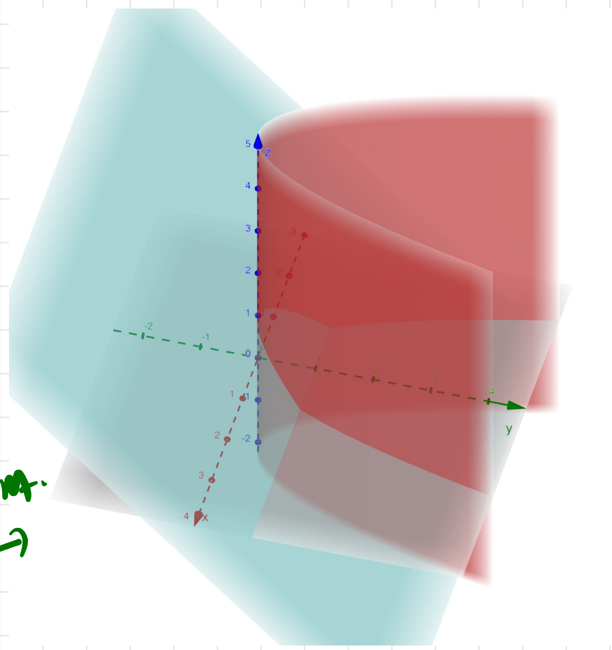
$z = 1 - y$







PELO GEOGEBRA.



$$V = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint_K dx\,dy \int_{z=0}^{z=1-y} dz =$$

$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} dx\,dy \int_{z=0}^{z=1-y} dz = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} dx\,dy \cdot \left(z \Big|_{z=0}^{z=1-y} \right) =$$

DEVIDO À SIMETRIA DO PROBLEMA.

$$= 2 \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} dx\,dy\,(1-y) = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=x^2}^{y=1} \underline{(1-y)}\,dy$$

$\int r^k\,dr$

$r = 1-y$

$dr = -dy$

$$= 2 \int_{x=0}^{x=1} dx \left(- \int_{y=x^2}^{y=1} (1-y) \cdot (-dy) \right)$$

$$= -2 \int_{x=0}^{x=1} dx \cdot \frac{(1-y)^2}{2} \Bigg|_{y=x^2}^{y=1} dy = -1 \int_0^1 (1-1)^2 - (1-x^2)^2\,dx$$

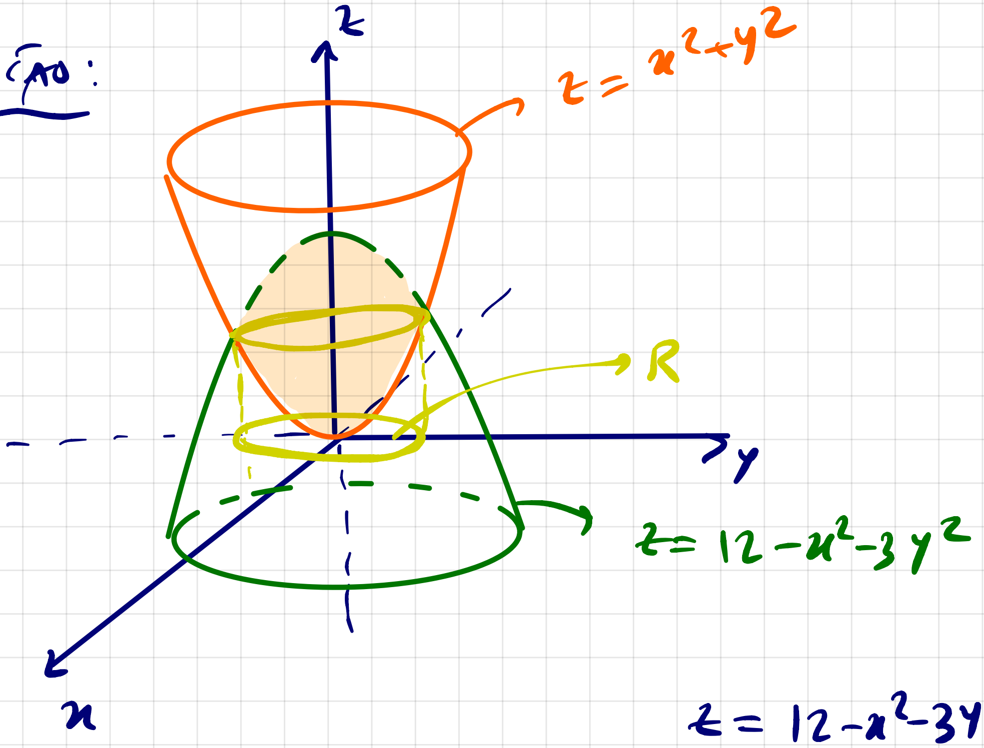
$$= \int_0^1 -(1 - 2x^2 + x^4)\,dx = -\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - (0) =$$

$$= \left(\frac{15 - 10 + 3}{15}\right) = \frac{8}{15}$$

02) Use integração tripla para calcular o volume do sólido S delimitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 12 - x^2 - 3y^2$.

Solução:



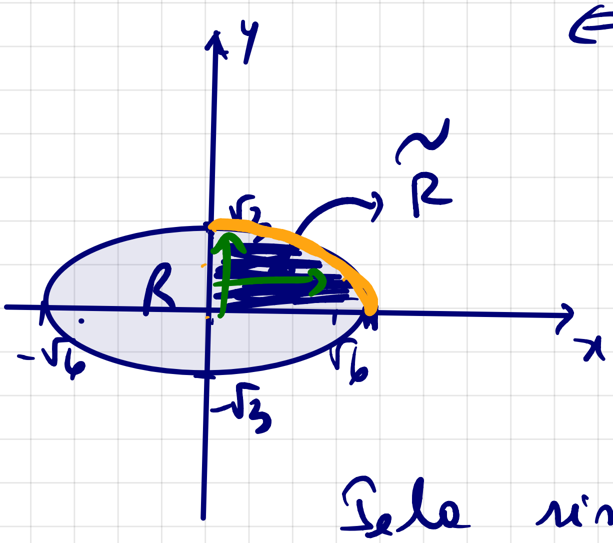
$$V = \iiint_{\Omega} dV = \iint_R dx\,dy \int_{z = x^2 + y^2}^{z = 12 - x^2 - 3y^2} dz$$

Precisamos equacionar e desenhar, no plano xy, a região R. Note que, c.f. o esquema, R é a interseção entre as duas superfícies. Ou seja, R será a solução do sistema:

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 12-x^2-3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 12-x^2-3y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2+4y^2 = 12 \quad \div 12$$

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{(elipse)}$$



Pela simetria do problema, temos:

$$V = \iiint_{\Omega} dV = 4 \cdot \iint_{\tilde{R}} dx\,dy \int_{z=x^2+y^2}^{z=12-x^2-3y^2} dz =$$

$$= 4 \cdot \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=\sqrt{6-2y^2}} dx\,dy \cdot (z)\Big|_{z=x^2+y^2}^{z=12-x^2-3y^2} =$$

$x^2 = 6-2y^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{6-2y^2}$

1º quad.

$$= 4 \cdot \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=\sqrt{6-2y^2}} (12 - x^2 - 3y^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

$$= 4 \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \int_{x=0}^{x=\sqrt{6-2y^2}} (12 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy =$$

$$= 8 \cdot \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{6-2y^2}} (6 - x^2 - 2y^2)\, dx \right) dy = 8 \cdot \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \left(6x - \frac{x^3}{3} - 2y^2 x\right) \Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{6-2y^2}} dy$$

$$= 8 \cdot \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \left[(6-2y^2) \cdot x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{6-2y^2}} dy$$

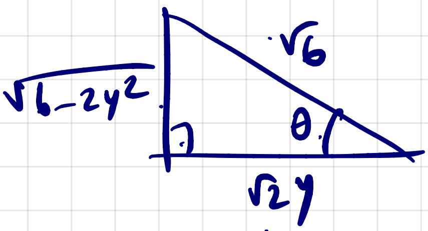
$$= 8 \cdot \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} (6-2y^2)\left(\sqrt{6-2y^2}\right) - \frac{\left(\sqrt{6-2y^2}\right)^3}{3}\, dy =$$

$$= 8 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 \cdot (6-2y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot (6-2y^2)^{\frac{3}{2}} \right) \cdot dy$$

$$= 8 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{3} \cdot (6-2y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dy = \frac{16}{3} \int_0^{\sqrt{3}} (6-2y^2)\sqrt{6-2y^2}\, dy$$

SUBST. TRIGONOM.

• $\int (6-2y^2)\sqrt{6-2y^2}\,dy$



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{6-2y^2}}{\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{6-2y^2} = \sqrt{6}\tan\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\cos\theta = \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}\cos\theta$$

$$\hookrightarrow dy = -\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int (6-2y^2)(\sqrt{6-2y^2})\,dy = \int\left[6-2\cdot(\sqrt{3}\cos\theta)^2\right]\cdot\sqrt{6}\tan\theta\cdot(-\operatorname{sen}\theta\, d\theta)$$

$$= -\int (6-6\cos^2\theta)\cdot\sqrt{6}\cdot\tan\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= -6\sqrt{6}\int (1-\cos^2\theta)\cdot\tan\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta = (\ldots)$$

exercício.