12/12/23 – AULA 12

Seguindo o estudo da técnica em decomposição em frações parciais, vejamos o caso 03

CASO 03: o denominador $q(x)=0$ possui raízes complexas distintas.

Neste caso, o denominador $q(x)$ fica fatorado possuindo fator quadrático irredutível. E então o numerador que o acompanhará na decomposição será um polinômio da forma $Ax+B$.

EXEMPLOS:

01) $$\int \frac{x^2-2x+5}{(x^2+1).(x-1)}$$

$(x^2+1)(x-1)=0 \iff$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$
$\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$
$=\pm i$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

termo quadrático IRREDUTÍVEL, ou seja não é possível fatorar mais nos reais.

Neste caso, a decomposição a ser feita será:

$$\frac{x^2-2x+5}{\cancel{(x^2+1)}\cdot(x-1)} = \frac{A\cdot x+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1) + C\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+C}{\cancel{(x^2+1)\cdot(x-1)}}$$

$$\Leftrightarrow 1x^2-2x+5 = (A+C)x^2+(-A+B)x+(-B+C)$$

$$+\begin{cases} A + C = 1 \\ -A+B = -2 \\ -B+C = 5 \end{cases}$$

$$2C = 4$$

$$\boxed{C = 2}$$

$$A+C=1$$
$$A = 1-C$$
$$A = 1-2 = -1$$

$$-B+C=5$$
$$B = C-5$$
$$B = 2-5$$
$$\boxed{B=-3}$$

Logo, obtemos:

$$\frac{x^2-2x+5}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-1x-3}{x^2+1} + \frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(x^2-2x+5)\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = \int \frac{(-x-3)\,dx}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{dv}{v}$$

$v = x-1$

$dv = dv$

$v = x^2+1$

$\Rightarrow dv = 2x\,dx$

$$\boxed{-\frac{1}{2}(2x) - 3 = -x-3}$$

$$= \int \frac{\left(-\frac{1}{2}(2x) - 3\right)dx}{x^2+1} + 2 \cdot \ln|x-1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+2} + 2\ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{dv}{v}$$

$v = x^2+1$

$dv = 2x\,dx$

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{v}{a}\right)$$

$v = x$

$dv = dx$

$$= -\frac{1}{2}\ln|r| - 3 \cdot \frac{1}{1} \cdot \arctan\left(\frac{x}{1}\right) + 2\ln|x-1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan(x) + 2\ln|x-1| + C$$

02) $$\int \frac{(1-2x^2)\,dx}{(x^2+3x+4)(x^2+4)}$$

zeros do denominador: $(x^2+3x+4)(x^2+4) = 0$

- $x^2+4 = 0 \iff x^2 = -4 \notin \mathbb{R}$.

- $x^2+3x+4 = 0 \iff$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} \notin \mathbb{R}$$

A decomposição será:

$$\frac{1-2x^2}{(x^2+3x+4)(x^2+4)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+3x+4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\equiv \frac{(Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+3x+4)}{(x^2+3x+4)(x^2+4)}$$

$$1-2x^2 \equiv Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + 3Cx^2 + 4Cx + Dx^2 + 3Dx + 4D$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 3C + D = -2 \\ 4A + 4C + 3D = 0 \\ 4B + 4D = 1 \end{cases}$$

$$4(B+D) = 1$$

$$B + D = \frac{1}{4}$$

$$B + 3C + D = -2$$

$$\underbrace{B + D}_{\frac{1}{4}} + 3C = -2$$

$$3C = -2 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 3C = -\frac{9}{4} \\ C = -\frac{9}{4} \times \frac{1}{3} \\ \boxed{C = -\frac{3}{4}} \end{cases}$$

$$A + C = 0$$

$$\Rightarrow A = -C = -\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{4}}$$

$$4A + 4C + 3D = 0$$

$$4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 3D = 0$$

$$\boxed{D = 0}$$

$$B + \underbrace{D}_{0} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$$

Logo, obtemos,

$$\frac{1-2x^2}{(x^2+3x+4)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+3x+4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2+3x+4} + \frac{-\frac{3}{4}x+0}{x^2+4}$$

Logo:

$$\int \frac{(1-2x^2)\,dx}{(x^2+3x+4)(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2+3x+4} - \frac{3}{4}\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$$

$$\int \frac{dv}{v}$$

$$\int \frac{dv}{v}$$

$v = x^2+4$

$dv = 2x\,dx$

$x\,dx = \frac{1}{2}dv$

$v = x^2+3x+4 \longrightarrow dv = (2x+3)dx$

$$3x+1 = \frac{3}{2}(2x+3) - \frac{7}{2}$$

$$\frac{9}{2} + \alpha = 1$$

$$\alpha = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\frac{3}{2}(2x+3)\,dx}{x^2+3x+4} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+4} - \frac{3}{4}\cdot\int \frac{\frac{1}{2}\,dv}{v}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2+3x+4| - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \ln|r| + C$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2+3x+4 = (x+a)^2+b$$

$$= x^2+2ax+a^2+b$$

$$2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$a^2+b = 4$$

$$b = 4-a^2$$

$$b = 4-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$b = 4-\frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$x^2+3x+4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}\ln|x^2+3x+4| - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} - \frac{3}{8}\ln|x^2+4| + C$$

$$= \frac{3}{8}\ln|x^2+3x+4| - \frac{7}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{\cancel{2}}} \cdot \arctan\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) - \frac{3}{8}\ln(x^2+4) + C$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2+4}\right) - \frac{7}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + C$$

**CASO 04:** $Q(x)$ possui raízes complexas repetidas: é quando o denominador possui um fator quadrático irredutível com potência.

Ex:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3(x+1)}$$

Neste caso, procede análogo ao caso 2.

$$\frac{x}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{G}{x+1}$$

Fica como exercício resolver o exemplo acima.