07/12/23 – AULA 10

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS:

Quando temos $\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, podemos recorrer à técnica que apresentaremos, chamada de decomposição em frações parciais. (se o grau de $P(x)$ for 1 e o do $Q(x)$ for 2 podemos, neste caso particular, recorrer à técnica de completamento de quadrado da aula passada).

O que vai nortear a resolução será examinando as raízes do denominador. Serão, portanto, 4 casos a se estudar:

CASO 1: $Q(x)$ possui raízes reais distintas;

CASO 02: $Q(x)$ possui raízes reais repetidas;

CASO 03: $Q(x)$ possui raízes complexas e distintas;

CASO 4: $Q(x)$ possui raízes complexas e repetidas.

CASO 1: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, onde $Q(x)=0$ possui raízes reais distintas.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n raízes reais de distintas de $Q(x)=0$ [i.e. grau de $Q(x)$ é n]

Então, podemos fatorar $Q(x)$ em termos das raízes, c.f. estudo de polinômios:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

Assim, precisaremos obter $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x-\alpha_1} + \frac{c_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{c_n}{x-\alpha_n}.$$

Vejamos exemplos:

01) $\displaystyle\int \frac{(3x+4)\,dx}{x^2-5x+6}.$

Solução: $Q(x) = x^2-5x+6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Assim, podemos escrever:

$$x^2-5x+6 = (x-3).(x-2)$$

Então, teremos:

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6} = \frac{3x+4}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \qquad (*)$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

$$\iff \quad 3x+4 \equiv Ax - 2A + Bx - 3B$$

$$3x+4 \equiv (A+B)x + (-2A-3B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \rightsquigarrow B = 3-A \\ -2A-3B=4 \end{cases}$$

$$-2 \cdot A - 3\cdot(3-A) = 4$$

$$-2A - 9 + 3A = 4$$

$$A = 4+9 \Rightarrow \boxed{A=13}$$

$$B = 3-A$$

$$B = 3-13 \Rightarrow \boxed{B=-10}$$

Assim, temos; de (*):

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6} = \frac{13}{x-3} + \frac{-10}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(\frac{13}{x-3} - \frac{10}{x-2}\right)dx =$$

$$= 13\int \frac{dx}{x-3} - 10\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$u = x-3 \Rightarrow du = dx$$

$$u = x-2 \Rightarrow du = dx.$$

$$= 13 \cdot \ln|x-3| - 10 \cdot \ln|x-2| + C$$

02) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

Solução: O denominador já está fatorado, e todas as raízes são reais e distintas. Assim, decompomos:

$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\equiv \frac{A\cdot(x-1)(x+2) + Bx\cdot(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$1x^2 - x + 1 \equiv Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx$$

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ A+2B-C = -1 \\ -2A = 1 \end{cases} \longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & A+B+\cancel{C} = 1 \\ + \; & A+2B-\cancel{C} = -1 \\ \hline & 2A+3B = 0 \\ & 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 3B = 0 \end{aligned}$$

$$3B = 1 \qquad \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

$$A+B+C = 1$$

$$C = 1 - A - B$$

$$C = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}$$

$$C = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$C = \frac{6+3-2}{6}$$

$$\boxed{C = \frac{7}{6}}$$

Logo, obtemos:

$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{7}{6}}{x+2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{7}{6}}{x+2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{6}\ln|x+2| + C$$

Obs.: No caso 01, podemos fugir da resolução de sist. linear:

$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A\cdot(x-1)(x+2) + Bx\cdot(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

- $x=0$:

$$0^2-0+1 = A\cdot(0-1)\cdot(0+2) + 0 + 0$$

$$1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

• $x = 1$:

$$1^2 - \cancel{1} + \cancel{1} = A\,\cancel{(1-1)(1+2)} + B\cdot 1\,(1+2) + C\cdot 1\cdot\cancel{(1-1)}$$

$$1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

• $x = -2$:

$$(-2)^2 - (-2) + 1 = A\underbrace{(-2-1)\cdot(-2+2)}_{0} + B\underbrace{(-2)\cdot(-2+2)}_{0} + C(-2)\cdot(-2-1)$$

$$4 + 2 + 1 = 6C \Rightarrow C = \frac{7}{6}$$

CASO 02: O denominador $Q(x)$ possui raízes reais repetidas.

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$

A decomposição será:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{x-\alpha_1} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-\alpha_2)^{m_2}} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^{m_2-1}} + \cdots + \frac{B_{m_2}}{x-\alpha_2} +$$

$$+ \frac{C_3}{x-\alpha_3} + \cdots \frac{C_n}{x-\alpha_n}.$$

EXEMPLOS:

01) $$\int \frac{(x^3-2x)\,dx}{(x-1)^2(x+2)(x-3)}$$

raízes do denominador: $x=3$
$x=-2$
$x=1$ [com multiplicidade 2]
(devido à pot. 2)

A decomposição será:

$$\frac{x^3-2x}{(x-1)^2(x+2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

$$= \frac{A\cdot(x+2)(x-3) + B.(x-1)(x+2)(x-3) + C(x-1)^2.(x-3) + D.(x-1)^2.(x+2)}{(x-1)^2.(x+2)(x-3)}$$

$$x^3-2x = Ax^2-Ax-6A + B(x-1).(x^2-x-6) +$$
$$+(Cx-3C).(x^2-2x+1) + (Dx+2D)(x^2-2x+1)$$

$$1x^3-2x \equiv Ax^2-Ax-6A + Bx^3-Bx^2-6Bx-Bx^2+Bx+6B+$$
$$+Cx^3-2Cx^2+Cx-3Cx^2+6Cx-3C+$$
$$+Dx^3-\cancel{2Dx^2}+Dx+\cancel{2Dx^2}-4Dx+2D$$

$$(+)$$

$$+\left\{\begin{aligned} B + C + D &= 1 \\ A - 2B - 5C &= 0 \\ -A - 5B + 7C - 3D &= -2 \\ -6A + 6B - 3C + 2D &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$-6A = -1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}}$$

$$(\ldots)$$

$$\begin{cases} -7B+2(1-B-D)-3D=-2 \\ 6B-3\cdot(1-B-D)+2D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7B+2-2B-2D-3D=-2 \\ 6B-3+3B+3D+2D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9B-5D=-4 \\ 9B+5D=4 \end{cases} \Longrightarrow D=\frac{4-9B}{5}$$