14/12/23 – AULA 12

APLICAÇÕES DA INTEGRAL INDEFINIDA:

01) Numa certa região Bárbara, duas tribos vizinhas têm-se odiado desde os tempos primitivos. Sendo povos bárbaros, seus poderes de crença são fortes e uma solene praga rogada pelo curandeiro da primeira tribo enlouquece os membros da segunda tribo, conduzindo-os ao assassínio e suicídio. Se a taxa de variação da segunda tribo é $-\sqrt{p}$ pessoas por semana, e se a população é 676 quando a praga é rogada, quando eles estarão todos estarão mortos?

SOLUÇÃO:

$$\frac{dp}{dt} = -\sqrt{p} \qquad (t \text{ em semanas})$$

$$dp = -\sqrt{p}\cdot dt$$

$$\frac{dp}{\sqrt{p}} = -dt \Rightarrow \int \frac{dp}{\sqrt{p}} = \int dt$$

$$\int p^{-\frac{1}{2}} dp = -\int dt$$

$$\frac{p^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -t$$

$$\boxed{2\sqrt{p} + c = -t} \quad (*)$$

A condição inicial estabelecida é:

quando $t=0 \Rightarrow p=676$.

Assim, na eq $(*)$, obtemos:

$$2\sqrt{676} + c = -0$$

$$2 \cdot 26 + C = 0 \rightarrow \boxed{C = -52}$$

Assim, a eq. (*) fica:

$$2\sqrt{p} - 52 = -t$$

Por fim, quando $p = 0$; $t = ?$

$$2\sqrt{0} - 52 = -t \Rightarrow \boxed{t = 52 \text{ semanas}}$$

LISTA 06.

9. **(Voltagem de um capacitor sendo descarregado)** Suponha que as cargas elétricas acumuladas em um capacitor estejam escapando astravés de seus terminais a uma taxa proporcional à voltagem V e que, se t for medido em segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Encontre V nessa equação, usando a notação V_0 para denotar o valor de V quando $t = 0$. Quanto tempo a voltagem demorará para atingir 10% de seu valor inicial?

Solução:

$$\boxed{t = 0 \Rightarrow V = V_0.}$$

$t = ?$ tal que $V(t) = \frac{1}{10} \cdot V_0$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40} V$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{40} \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = -\frac{1}{40} \int dt$$

$$\ln|V| = -\frac{1}{40} t + C$$

$$\boxed{\log_b a = c \iff b^c = a} \longrightarrow \qquad \log_e |V| = -\frac{1}{40}t + C$$

$$e^{-\frac{1}{40}t + C} = V$$

$$V = e^{-\frac{1}{40}t} \cdot \underbrace{e^C}_{=: K}$$

$$V = K \cdot e^{-\frac{1}{40}t}$$

Pela condição inicial do problema, temos:

$t = 0$; $V = V_0$; e disso segue que

$$V_0 = K \cdot \underbrace{e^0}_{=1} \Rightarrow K = V_0$$

Ou seja, obtemos:

$$V = V_0 \cdot e^{-\frac{1}{40}t}$$

Por fim, quando $V = \frac{1}{10} V_0$, teremos:

$$\frac{1}{10} \cancel{V_0} = \cancel{V_0} \cdot e^{-\frac{1}{40}t}$$

$$\frac{1}{10} = e^{-\frac{1}{40}t} \iff \ln \frac{1}{10} = \ln e^{-\frac{1}{40}t}$$

$$\iff \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 10 = -\frac{1}{40} t \cdot \underbrace{\ln e}_{1}$$

obs: usamos aqui:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^m = m \cdot \log a$$

$$\log_a a = 1 \iff \ln e = \log_e e = 1$$

$$-\ln 10 = -\frac{1}{40} t$$

$$t = 40 \cdot \ln 10 \cong 92{,}10 \text{ segundos.}$$

6. **(Decaimento radioativo)** Se N é o número de átomos radioativos presente num certo material em um instante de tempo t, então, a equação que descreve o decaimento é dada por

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

que estabelece que a variação de caimento do material radioativo em relação ao tempo é proporcional à massa de material radioativo no referido instante de tempo, onde λ é a constante de decaimento. Se N_0 é o número de átomos radioativos no instante inicial $t = 0$ e N é o número de átomos no instante t, mostre que a equação acima determina $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad t = 0;\ N = N_0$$

CONDIÇÃO INICIAL

Mostrar que $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt \implies \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt$$

$$\ln |N| = -\lambda \cdot t + C$$

$$\iff \log_e |N| = -\lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t + c} = N$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t} \cdot \underbrace{e^{c}}_{= K} = N \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{N = K \cdot e^{-\lambda t}}$$

Pela condição inicial: $t = 0$; $N = N_0$

$$N_0 = K \cdot \underbrace{e^{0}}_{= 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = N_0}$$

Assim, obtemos: $\boxed{N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$

11. Em eletroqímica a equação de Cottrell

$$I = n \cdot F \cdot Ac\sqrt{\frac{D}{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}$$

descreve a corrente I no instante de tempo t depois de um eletrodo estar imerso em uma solução. A corrente I é definida como a variação da carga Q em relação ao tempo, ou seja, $I = \frac{dQ}{dt}$. Use isto para encontrar uma expressão para a carga.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad ; \quad Q = ?$$

$$\frac{dQ}{dt} = I = \underbrace{n \cdot F \cdot A_c \cdot \sqrt{\frac{D}{\pi}}}_{= K \text{ (CONSTANTE)}} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = K \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$dQ = K \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Integrando, vem:

$$\int dQ = K \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$Q = k \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$Q = 2k\sqrt{t} + C$$

$$\boxed{Q = 2\, n \cdot F \cdot A_c \cdot \sqrt{\frac{D}{\pi}} \cdot \sqrt{t} + C}$$

Impondo que $Q=0$ em $t=0$, temos:

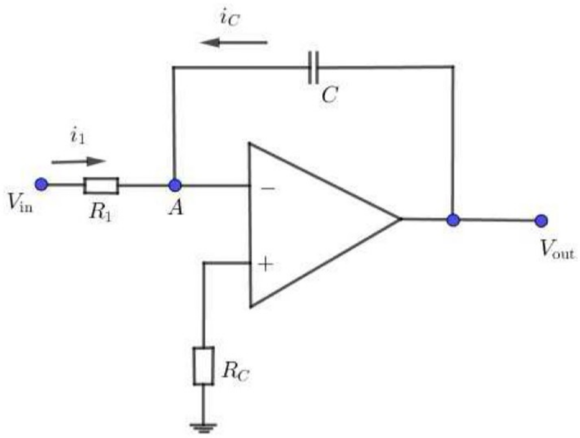
$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$, e Logo:

$$\boxed{Q = 2\, n \cdot F \cdot A_c \cdot \sqrt{\frac{D}{\pi} \cdot t}}$$

2. **(Integração eletrônica)** O integrador eletrônico é um circuito cuja saída é a integral do sinal de entrada. Ou seja,

$$V_{\text{out}}(t) = \int V_1(t)dt,$$

onde $V_1(t)$ é a tensão de entrada, em função do tempo e $V_{\text{out}}(t)$ a tensão de saída em função do tempo. Abaixo é apresentado o esquema de um circuito integrador ideal, utilizando amplificador operacional.



No nó A temos as seguintes igualdades entre as correntes elétricas i_1 e i_C destacadas: $i_1 = -i_C$, onde

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad \text{e} \quad i_C = -C\frac{dV}{dt},$$

com $V_1 = V_1(t)$ e a resistência R_1 e a capacitância C são constantes.

(a) Com as igualdades acima, mostre que a tensão de saída fica dada por

$$V_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{R_1 \cdot C}\int V_1(t)dt.$$

(b) Para o circuito integrador com amplificador operacional, com resistor $R_1 = 100K\Omega$ e capacitor $C = 0,01\mu F$, calcule a tensão de pico[1] na saída, se a tensão de entrada é dada por $V_{\text{in}} = \frac{1}{2}\text{sen}\,(100t)$.

a) $V_{out}(t) = \int V_1(t)\,dt$

$i_1 = -i_C$

$\frac{V_1}{R_1} = -\left(-C\frac{dV}{dt}\right)$

$\frac{V_1(t)}{R_1} = C \cdot \frac{dV}{dt}$

$$V_1(t) \cdot dt = R_1 \cdot C \cdot dV$$

Integrando, vem:

$$\int V_1(t)\,dt = \int R_1 \cdot C \cdot dV$$

$$\int V_1(t)\,dt = R_1 \cdot C \cdot \int dV$$

$$\int V_1(t)\,dt = R_1 \cdot C \cdot V$$

$$V = \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot \int V_1(t)\,dt$$

(b) e (c) – exercícios.

---

3. Se a aceleração de uma partícula que se move com velocidade variável v é $-kv^2$, onde k é uma constante e se v_0 é a velocidade quando $t = 0$, mostre que

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

$$\frac{dv}{dt} = a = -k \cdot v^2 \quad ; \quad t = 0, \; v = v_0$$

(condição inicial)

$$\frac{dv}{dt} = -k \cdot v^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -k \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = -\int k \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int r^{-2}\,dr = -k\cdot\int dt$$

$$\frac{r^{-1}}{-1} = -k\cdot t + C$$

$$\boxed{-\frac{1}{r} = -kt + C}$$

Pela condição inicial, quando $t=0$, $r=r_0$, teremos:

$$-\frac{1}{r_0} = -k\cdot 0 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{r_0}$$

Portanto,

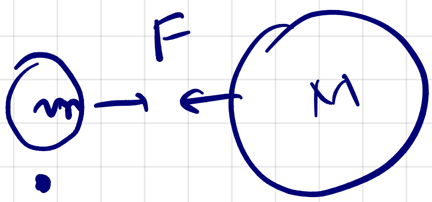
$$-\frac{1}{r} = -k\cdot t - \frac{1}{r_0} \qquad \times(-1)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + k\cdot t}$$

4. De acordo com a lei da gravitação de Newton, duas partículas quaisquer de massas M e m se atraem com uma força F cuja grandeza é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre elas, ou seja,

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

onde G chama-se *constante de gravitação*. Se M está fixado na origem, qual o trabalho exigido para mover m de $r = a$ para $r = b$, onde $a < b$? Obs.: O *elemento de trabalho* é dado por $dW = F dr$. (Resp.: $W = GMm(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$).



$$dW = F \cdot dr$$

$$dW = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr$$

$$\int dW = \int G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr$$

$$W = G \cdot M \cdot m \cdot \int \frac{dr}{r^2}$$

$$W = G \cdot M \cdot m \cdot \int r^{-2} dr$$

$$W = G \cdot M \cdot m \cdot \frac{r^{-1}}{-1} + c$$

$$W = - G \cdot M m \cdot \frac{1}{r} + C$$

$$W(b) - W(a) = - G M m \cdot \frac{1}{b} + C - \left(-G M m \frac{1}{a} + C \right)$$

$$= - G M m \frac{1}{b} + \cancel{C} + G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{a} - \cancel{C}$$

$$= G M m \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$$

$$= \underbrace{G \cdot M m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

8. **(Reações químicas de Primeira Ordem)** Em algumas reações químicas, a taxa à qual a quantidade de uma substância varia em relação ao tempo é proporcional à quantidade presente. Para a transformação da δ-glucono lactona em ácido glucônico, por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y,$$

onde t é medido em horas. Se houver 100 g de δ-glucono lactona presentes quando $t = 0$, quantos gramas restação depois da primeira hora? (Resp.: 54,88 g)

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y$$ (t em horas)

$t = 0 \Rightarrow y = 100g$
(condição inicial)

$\boxed{t = 1 \; ; \quad y = ?}$

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y \iff \frac{dy}{y} = -0,6\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = -0,6 \cdot \int dt$$

$$\ln|y| = -0,6 \cdot t + c$$

$$\log_e |y| = -0,6t + c$$

$$e^{-0,6t} \cdot \underbrace{e^c}_{k} = y$$

$y = k \cdot e^{-0,6t}$, como $y = 100$ quando $t = 0$,

obtemos:

$100 = k \cdot e^0 \Rightarrow \boxed{k = 100}$

Logo, obtemos:

$$y = 100 \cdot e^{-0,6t}$$

Por fim, para $t = 1$, temos:

$$y = 100 \cdot e^{-0,6 \cdot 1} \cong 54,88 \text{ g}.$$