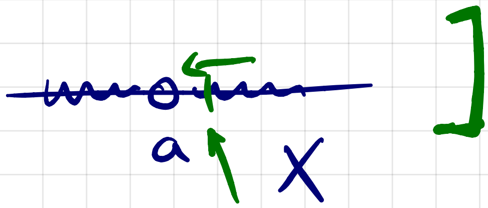
CÁLCULO 1.

12/12/23 – AULA 12

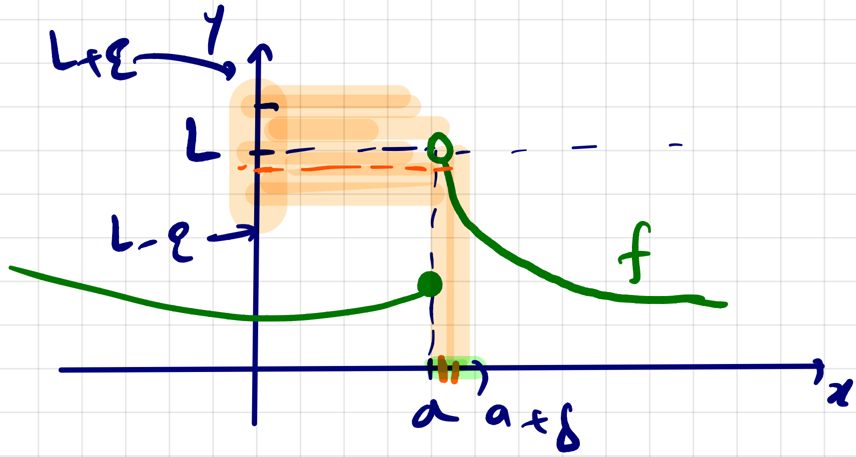
LIMITES LATERAIS

Def.: Seja $f: X \to \mathbb{R}$, $a \notin X$ um ponto de acumulação à direita de X [ou seja $x \in X$ é tal que $x \to a^+$, ou x vai se aproximando de a por valores à direita de a:



]

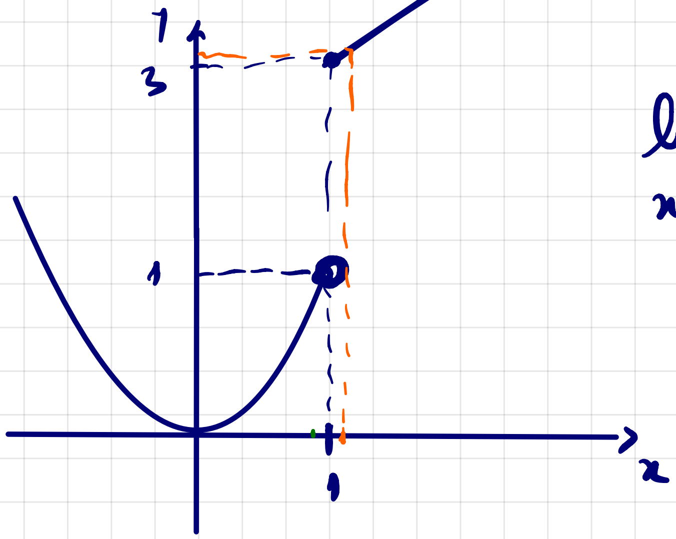
Dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, e somente se,



$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x: \quad a < x < a + \delta$

$$\implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ex.1 $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

Do mesmo modo se define $\lim_{x \to a^-} f(x)$ (pela esquerda, ou seja, se aproxima por valores ligeiramente menores que a)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x:$$

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

No desenho acima, temos que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

Pelo acima observado, concluímos que

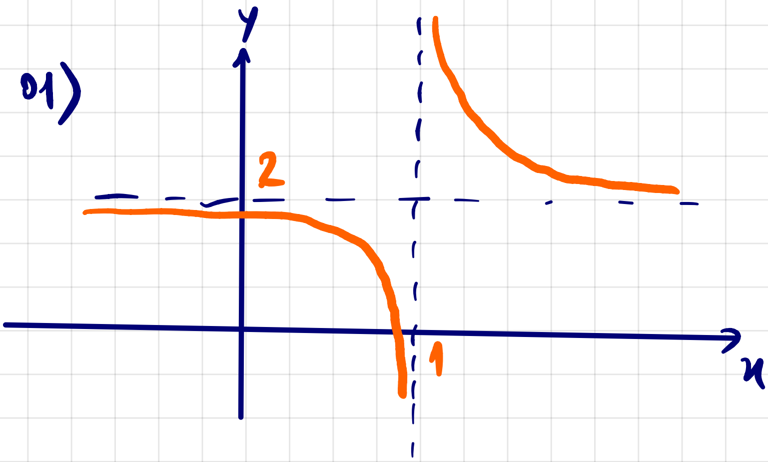
$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Caso contrário, ou seja, se $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, concluímos que $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.

Ou seja, para existir limite em um ponto, os limites laterais devem existir e devem ser iguais.

Vejamos alguns exemplos gráficos:

01)



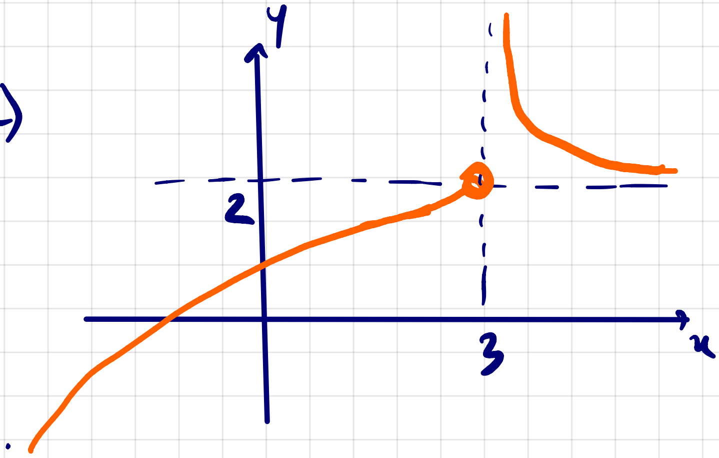
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x).$$

02)



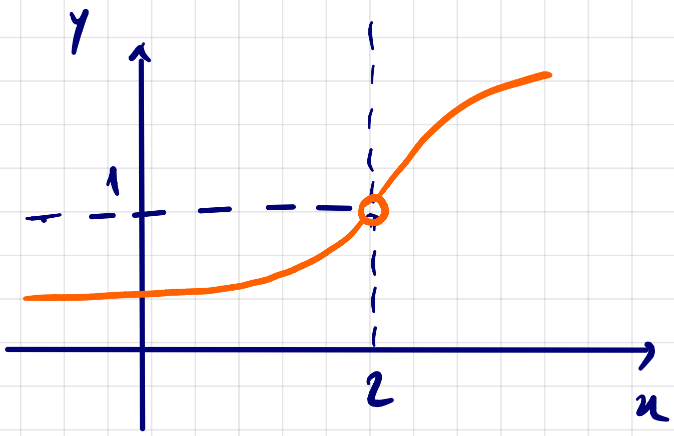
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\nexists \lim_{x \to 3} f(x).$$

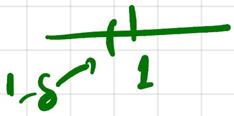
03)



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

LIMITES INFINITOS:

• $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = ?$ Tome $\delta>0$ e considere $x\to 1-\delta$ $(x\to1^-)$



$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to1-\delta}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\cancel{1}-\delta-\cancel{1}} =$$

$$= \frac{1}{-\delta} = -\frac{1}{\delta} \xrightarrow[\delta\to0]{} -\infty$$

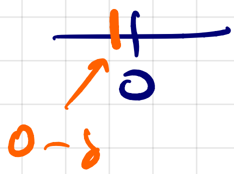
• $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = ?$ Tome $\delta>0$ e considere $x\to 1+\delta$. $(x\to1^+)$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to1+\delta}\frac{1}{\cancel{x}+\delta-\cancel{x}} = \frac{1}{\delta} \xrightarrow[\delta\to0]{} +\infty \quad (\delta>0)$$

Vejamos outro exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

• $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^2} = ?$ Tome $\delta>0$ e veja $x\to 0-\delta$ $(x\to0^-)$



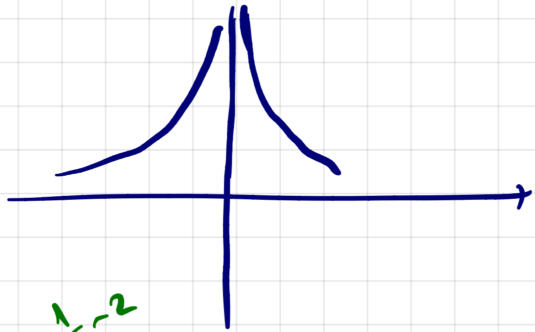
Assim, temos:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0-\delta} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-\delta)^2} = \frac{1}{\delta^2} \underset{\delta\to 0}{=} +\infty$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = ?$

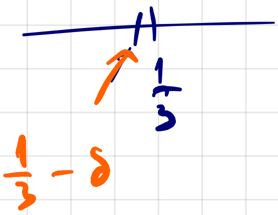
Tome $\delta>0$, e seja
$x = 0+\delta \quad (x\to 0^+)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0+\delta} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\delta^2} \xrightarrow[\delta\to 0]{} +\infty$$



- $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} \frac{x-2}{1-3x} = \frac{\frac{1}{3}-2}{0}$

Tome $\delta>0$ tal que
$x = \frac{1}{3}-\delta \quad \left(x\to \frac{1}{3}^-\right)$



Assim:

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} \frac{x-2}{1-3x} = \lim_{x\to \frac{1}{3}-\delta} \frac{x-2}{1-3x} = \frac{\frac{1}{3}-\delta-2}{1-3\cdot\left(\frac{1}{3}-\delta\right)}$$

$$= \frac{\frac{1-3\delta-6}{3}}{\cancel{1}-\cancel{1}+3\delta} = \frac{-\frac{5}{3}-\delta}{3\delta} \xrightarrow[\delta\to 0^+]{} \frac{-\frac{5}{3}}{0^+} \to -\infty$$

$(\delta>0)$

LISTA 03 09 - (x): $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

Seja $\delta > 0$ e tome $x = 1-\delta$

$\hookrightarrow x \to 1^-$

Então:

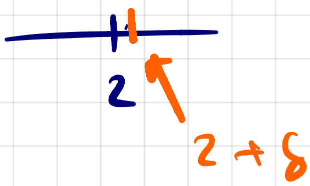
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \to 1-\delta} \frac{x-1}{|x-1|} = \frac{\cancel{1}-\delta-\cancel{1}}{|\cancel{1}-\delta-\cancel{1}|}$$

$$= \frac{-\delta}{|-\delta|} = \frac{-\delta}{\delta} = -1$$

$\delta > 0$

LISTA 03 09 (u):

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = ?$$



Seja $\delta > 0$ e tome $x = 2+\delta$ $(x \to 2^+)$

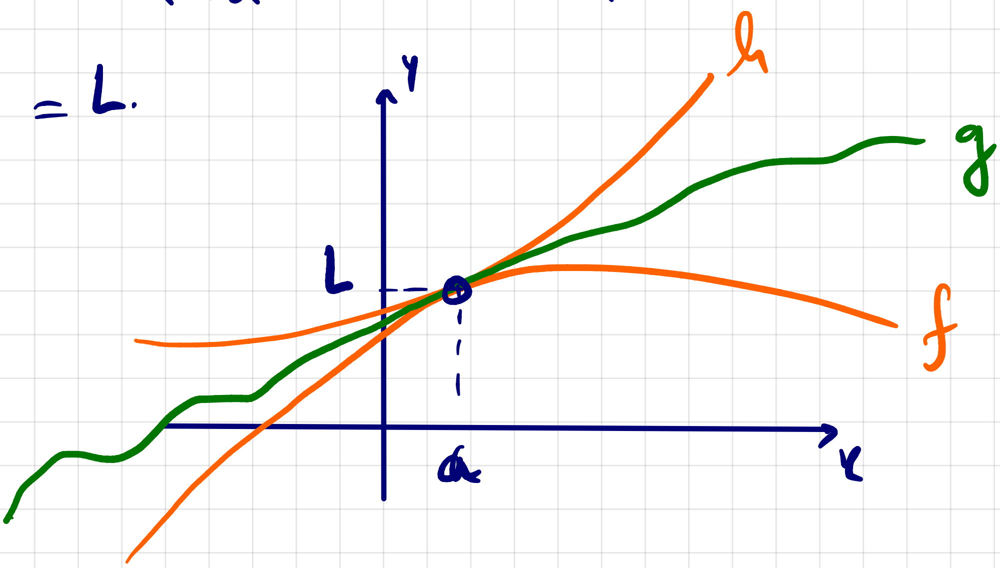
Assim, obtemos:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \to 2+\delta} \frac{2+\delta}{\cancel{2}+\delta-\cancel{2}} = \frac{2+\delta}{\delta} \to \underset{\delta \to 0}{\frac{2}{0^+}} = +\infty$$

TEOREMA DO SANDUÍCHE (OU DO CONFRONTO)

Sejam $f, g, h: X \to \mathbb{R}$ funções, a um ponto de acumulação(*) do conj. X, tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in X$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então

$\lim_{x\to a} g(x) = L$.



DEMONSTRAÇÃO: Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_1 > 0$, tal que

$$\forall x: 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (*)$$

Como $\lim_{x\to a} h(x) = L$, segue que $\exists\, \delta_2 > 0$, tal que,

$$\forall x: 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |h(x) - L| < \varepsilon. \qquad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, temos que,

(*) Lembre que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um conj. X se existir uma sequência de pontos de X que convergem para a, e escrevemos $x \to a$. $(x \in X)$

$\forall x : 0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$, ou seja vale que

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \text{e} \quad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in X$, então subtraindo L, vamos obter:

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon,$$

ou seja, $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$, sempre que $0<|x-a|<\delta$

ou seja,

$|g(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $0<|x-a|<\delta$, i.e.:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

$\square$

EXEMPLOS:

LISTA 03 – 11) SUPONDO QUE VALE A SEGUINTE CADEIA DE DESIGUALDADES:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

PROVE QUE $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

solução: Note que

$$1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4},$$

subtraindo 1 em toda cadeia de desigualdades:

$$\Rightarrow \cancel{1}-\frac{x^2}{2}-\cancel{1} \le \cos x - 1 \le \cancel{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\cancel{1}$$

$$-\frac{x^2}{2} \le \cos x - 1 \le -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4} \qquad (I)$$

Dividindo por $x>0$, vem:

$$-\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} \le \frac{\cos x - 1}{x} \le \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + \frac{x^{\cancel{4}\,3}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{2} \le \frac{\cos x - 1}{x} \le \frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}$$

$x \to 0^+$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2} = 0 \;;\; \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2}+\frac{x^3}{4} = 0$$

$$\underset{\text{T. do sanduíche}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0} \qquad (*)$$

Dividindo (I) por $x<0$, obtemos:

$$-\frac{x^2}{2} \le \cos x - 1 \le -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

$(\div\ x<0)$:

$$-\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} \ge \frac{\cos x - 1}{x} \ge -\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + \frac{x^{\overset{3}{\cancel{4}}}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4} \le \frac{\cos x - 1}{x} \le -\frac{x}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4} = 0$ e

$\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{x}{2} = 0$, segue que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0} \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ concluímos que

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$