CÁLCULO 1. $\boxed{07/12/23 \text{ – AULA 11}}$

07) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+x+1}}{x^3+1} = \frac{0}{0}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+x+1}}{x^3+1} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(\cancel{\sqrt{x+2}})^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{x^2+x+1}})^{\cancel{2}}}{(x^3+1) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+x+1})} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{x}+2 - x^2 - \cancel{x} - 1}{(x^3+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+x+1})} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-x^2+1}{(x^3+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+x+1})} =$$

$(x-a)$

$\rightarrow$ DIVIDE POR $x-a$

$$\begin{array}{l|l}
-\cancel{x^2} + 1 & x+1 \\
+\cancel{x^2} + x & \overline{-x+1} \\
\hline
\quad x + \cancel{1} & \\
\quad -x \cancel{-1} & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow -x^2+1 = (x+1) \cdot (-x+1)$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} + 1 & x+1 \\
-x^3 - x^2 & \overline{x^2 - x + 1} \\
\hline
-\cancel{x^2} + 1 & \\
+\cancel{x^2} + x & \\
\hline
\quad x + \cancel{1} & \\
\quad -x \cancel{-1} &
\end{array}$$

$\Rightarrow x^3+1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 1)$

$$\overline{}$$
$$0$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(-x+1)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x^2-x+1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{-x+1}{(x^2-x+1)\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \frac{-(-1)+1}{[(-1)^2-(-1)+1]\cdot(\sqrt{-1+2}+\sqrt{(-1)^2-1+1})}$$

$$= \frac{2}{(1+1+1)\cdot(1+1)} = \frac{\cancel{2}}{3\cdot\cancel{2}} = \frac{1}{3}$$

PROPRIEDADES DOS LIMITES:

TEOREMA: (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função, se existir, é ÚNICO.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$.

A mostrar: $L = M$.

Por absurdo, suponha que $L \neq M$.

Tome $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2} > 0$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = M$, então $\delta_2 > 0$ tal que

$$\forall x : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (**)$$

Disso, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, valem $(*)$ e $(**)$

Assim, obtemos:

$$|L-M| = |L \underbrace{- f(x) + f(x)}_{0} - M| = |(L - f(x)) + (f(x) - M)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - M|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Use $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2} > 0 \Rightarrow |L-M| = 2\varepsilon.$

Ou seja, obtemos

$$2\varepsilon = |L-M| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon < \varepsilon \quad (\div\, \varepsilon > 0)$$

$$\Rightarrow 2 < 1. \quad (\text{Absurdo!})$$

Portanto, $L = M$.

$\square$

TEOREMA: PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES:

Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$; então:

(i) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = L - M$

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M.$

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

(v) $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $L > 0$

(vi) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = L^M$

Faremos apenas a demonstração do item (i).

(i) Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então, $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x : 0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$.

Assim, avaliando a diferença $|f(x) + g(x) - (L+M)|$, obtemos:

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ por } (*)} + \underbrace{|g(x) - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ por } (**)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, mostramos que, para o $\varepsilon > 0$ dado, temos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tal que $\forall x : 0 < |x-a| < \delta$, implica em

$$|(f(x) + g(x)) - (L+M)| < \varepsilon \text{ ; ou seja,}$$

mostramos que

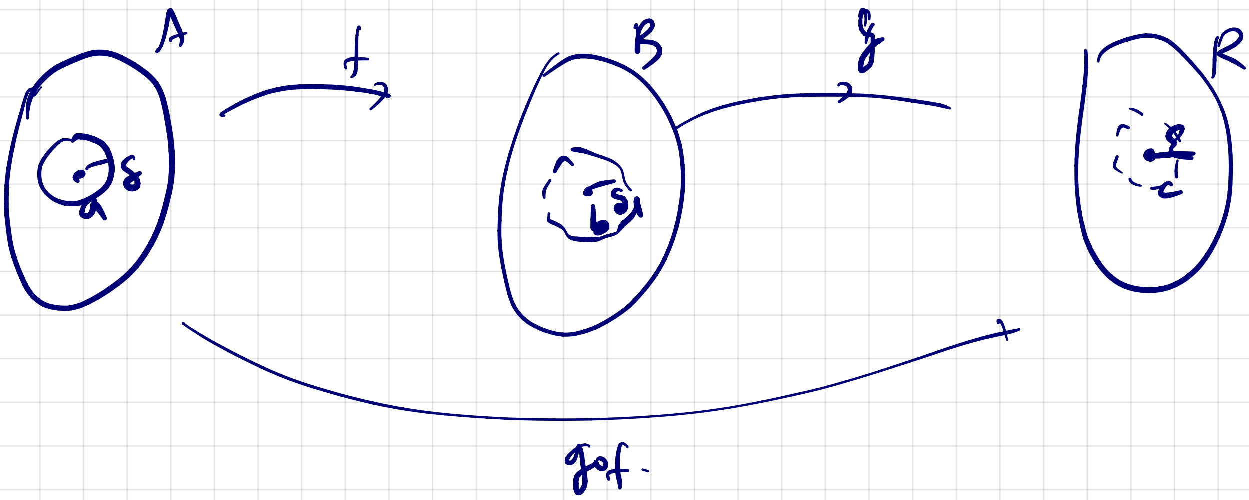
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: (LIMITE DA COMPOSTA). Sejam $f: A \to \mathbb{R}$; $g: B \to \mathbb{R}$, com $f(A) \subset B$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to b} g(x) = c$, então

$$\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$$

DEMONSTR.: Dado $\varepsilon > 0$.



Como $\lim_{y\to b} g(y) = c$, então $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall y: 0<|y-b|<\delta_1 \Rightarrow |g(y)-c|<\varepsilon.$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = b$, então, $\exists\, \delta > 0$ tal que,

$$\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{y}-b| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x))-c|<\varepsilon.$$

Ou seja, $\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$. $\square$

Ex.: $\lim_{x\to 2} (x-1)^2 = (2-1)^2 = 1^2 = 1.$

Ou: $f(x) = x-1$; $g(x) = x^2$

Então; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2$

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = ?$$

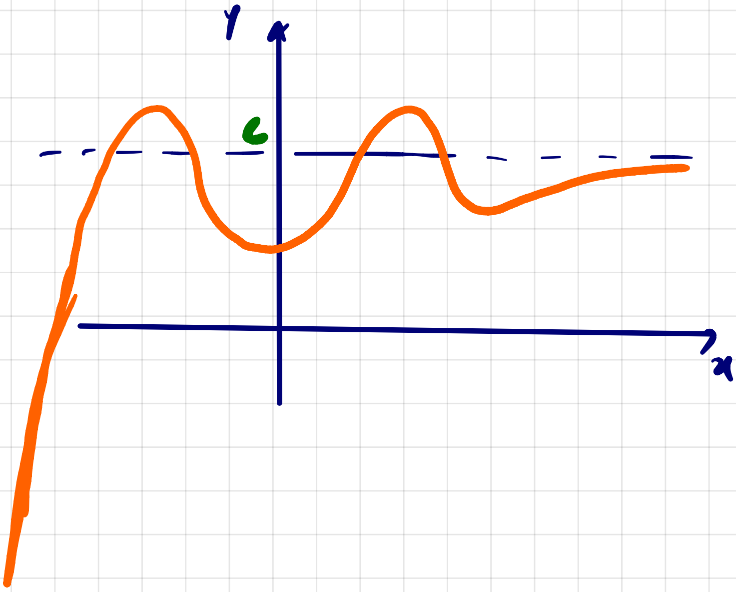
- $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x-1) = 1 = b$

- $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = (1)^2 = 1.$

LIMITES NO INFINITO:

Seja $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$, P e g polinômios.

Vamos examinar o que acontece com a imagem quando x cresce arbitrariamente ou decresce arbitrariamente. Ou seja, quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, respectivamente.



Neste desenho, intuitivamente observamos que

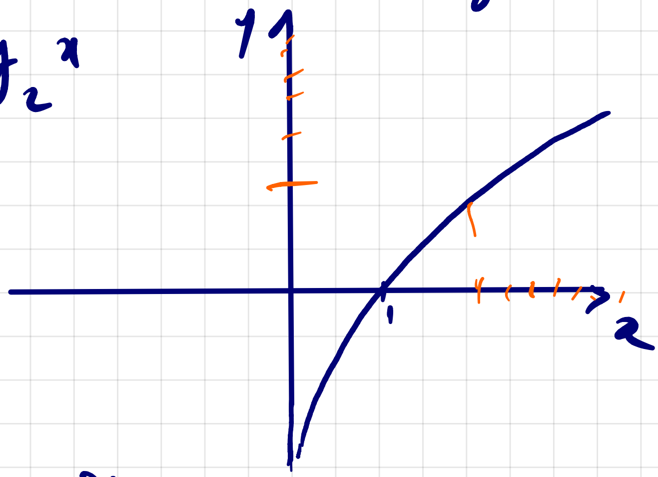
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Um outro exemplo, envolvendo logaritmos:

$f(x) = \log_2 x$

$x > 0$



Neste caso, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty$$

Voltemos ao caso dos polinômios.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$$

($\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$ são símbolos de indeterminação)

EXEMPLOS:

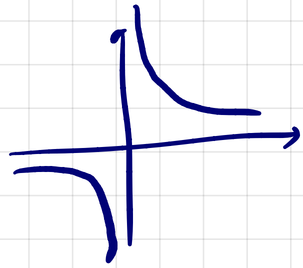
01) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x + 80} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2\left(1 - \frac{5\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}} + \frac{7}{3x^2}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{3}}} + \frac{80}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x^2}\left(1 - \underbrace{\frac{5}{3x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{7}{3x^2}}_{\to 0}\right)}{x^{\cancel{3}}\left(1 + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{80}{x^3}}_{\to 0}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Obs: $f(x) = \frac{1}{x}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$

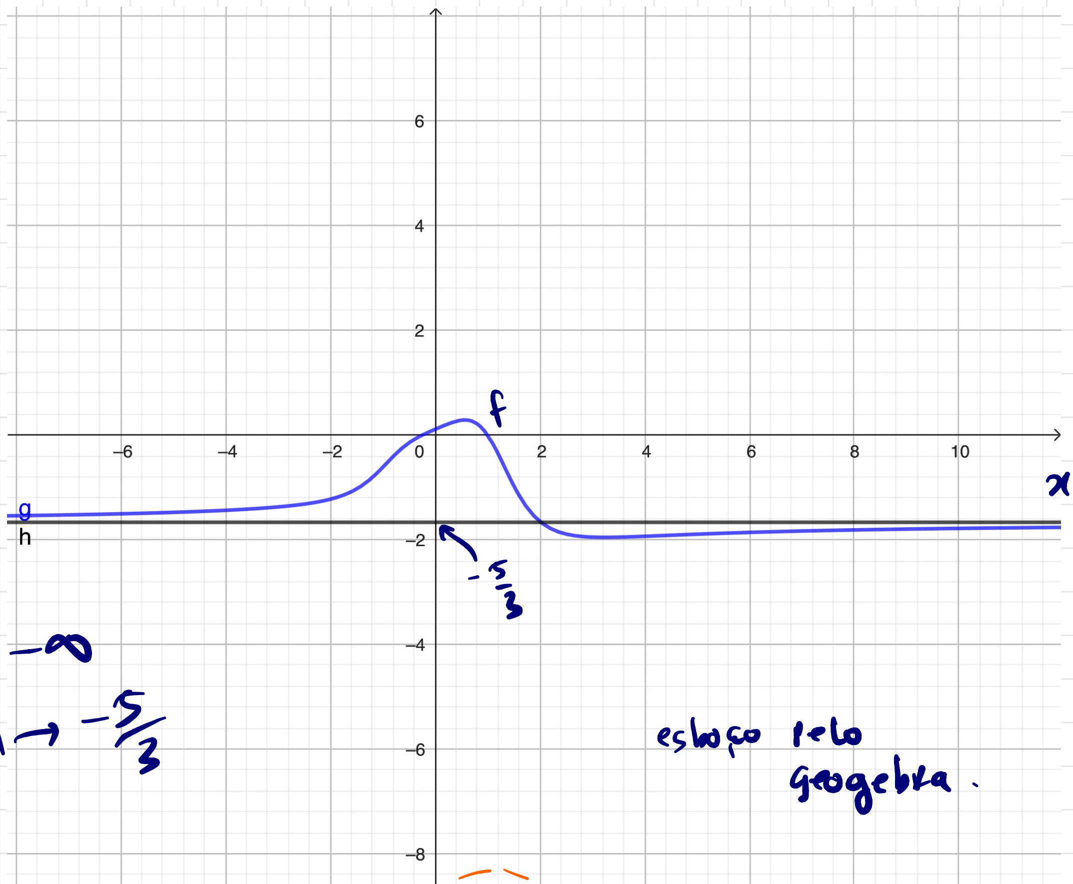


Na prática, basta tomar os graus mais altos do num. e denominador:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{x^3 + 2x + 80} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

02) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x - 5x^4 + 1}{3x^4 - 2x^3 + x + 9} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5\cancel{x^4}}{3\cancel{x^4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-5}{3}\right)$

$= -\frac{5}{3}$



$x \to +\infty$

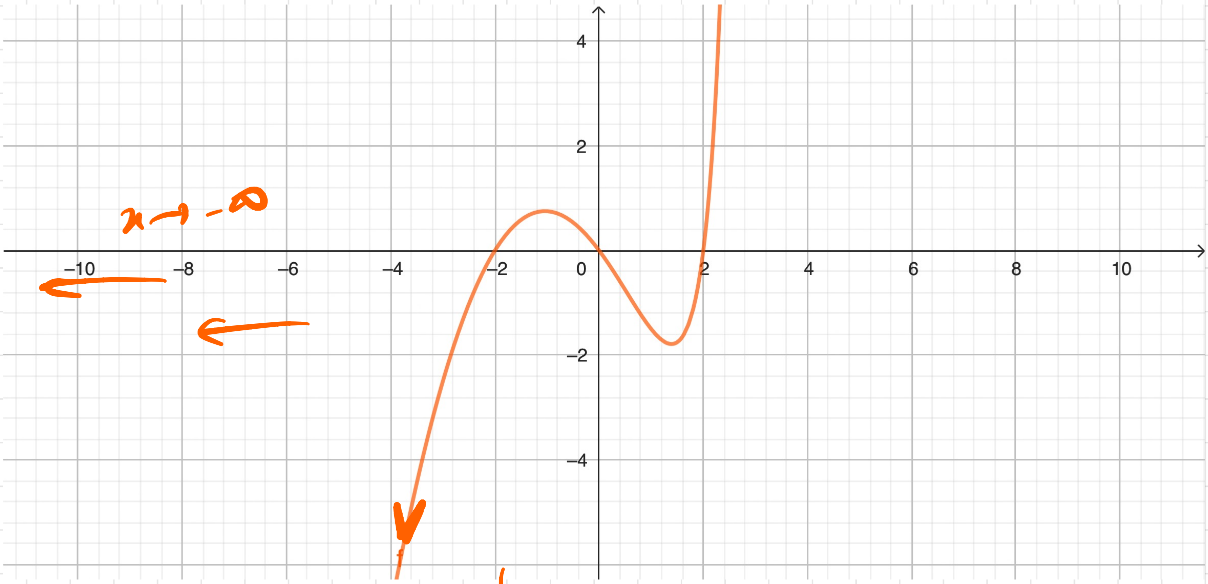
$x \to -\infty$

$f(x) \to -\frac{5}{3}$

esboço pelo geogebra.

03) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - x^3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -(-\infty)^2 = -(+\infty) = -\infty$



$y \; -\infty$

04) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 - 4x^2 + 1}{3 - 2x^2 - x^5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3\cancel{x^3}}{-x^{\cancel{5}}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{-x^2} = \dfrac{3}{-(-\infty)^2} = \dfrac{3}{-\infty} = 0$