14/12/23 – AULA 13

LIMITES NOTÁVEIS:

TEOREMA: (LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL)

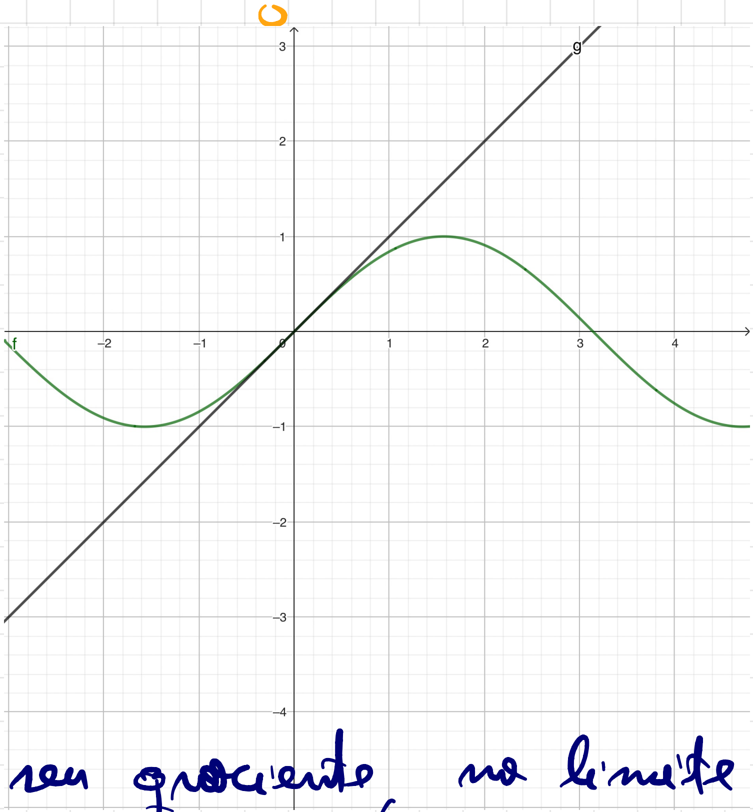
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Obs: Em geral, se tivermos $\frac{\operatorname{sen} \text{arco}}{\text{arco}}$, e resultar em $\frac{0}{0}$ ao substituir a variável pela tendência do limite, recorremos ao limite fundamental, ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \text{arco}}{\text{arco}} = 1.$$

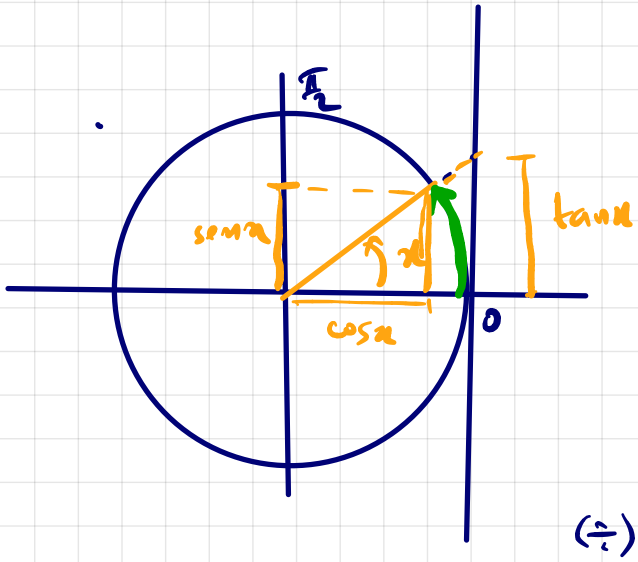
$\hookrightarrow \frac{0}{0}$

ideia gráfica:



perto da origem $x=0$, os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$ são "quase" iguais, por isso, o seu quociente, no limite em $x \to 0$, torna-se igual a 1.

DEMONSTR.: Seja $\delta > 0$ e considere $0 < x < \delta$, com $\delta < \frac{\pi}{2}$ (i.e., no 1º q)



Veja que:

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x$$

i.e.,

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$(\div)$ $\operatorname{sen} x > 0$ (pois $x \in 1^{\circ}q$)

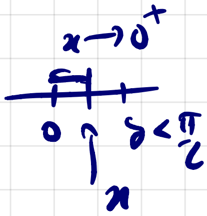
$$\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Tomando os inversos, vem:

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{\cos x}{1} \quad , \text{i.e.,}$$

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$



Tomando o limite com $x \to 0^+$, vamos obter:

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \cos x}_{= \cos 0 = 1} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \underbrace{\lim_{x \to 0^+} 1}_{= 1}$$

Pelo T. do Sanduíche concluímos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.} \quad (I)$$

Analogamente se mostra que $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$ (II)

conclusão: de (I) e de (II) segue que

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

$\square$

EXEMPLOS: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{7x} = \frac{0}{0}$ (INDETERM.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\frac{7\cancel{x}}{3\cancel{x}}} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$$

$\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 1$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{4x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{x^2-x}}{\frac{4x}{x^2-x}} =$$

$\frac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{x^2-x} \to 1$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{4x}{x^2-x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{0-1}} = -\frac{1}{4}$$

$\frac{1-\cos 0}{3\cdot 0} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = ?$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\text{sen}^2 x = (1-\cos x)\cdot(1+\cos x)$

$\Rightarrow \boxed{1-\cos x = \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}}$

Assim, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x} \cdot \frac{1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, x}{(1+\cos x)\cdot 3 \cdot x \cdot x}$$

$\to 1 \qquad \to 1$

$$= \frac{1}{(1+\underbrace{\cos 0}_{1})\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$\frac{\text{sen}(2-2)}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0}$

(d) $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(2-x-x^2)}{\sqrt{x+3}-2} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\text{sen}(2-x-x^2)}{2-x-x^2}}{\frac{\sqrt{x+3}-2}{2-x-x^2}} = \frac{1}{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2-x-x^2}} =$$

$\to 1$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2-x-x^2} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x+3})^2 - (2)^2}{(2-x-x^2)(\sqrt{x+3}+2)}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{(2-x-x^2)(\sqrt{x+3}+2)}} =$$

$$\begin{array}{rl|l}
\cancel{-x^2} & -x+2 & x-1 \\ \cline{3-3}
\cancel{+x^2} & -x & -x-2 \\ \hline
 & -2x \cancel{+2} & \\
 & +2x -2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$-x^2-x-2 = (x-1).(-x-2)$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\cdot(-x-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{(-1-2)\cdot(\sqrt{1+3}+2)}} = \frac{1}{\dfrac{1}{-3 \cdot 4}} = -12$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{\operatorname{sen} 9x} = \;$ 0/0

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 9x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot \overbrace{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3.x}}^{1} + 7\cdot \overbrace{\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}}^{1}}{9\cdot \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen} 9x}{9.x}}_{1}}$$

$$= \frac{3+7}{9} = \frac{10}{9} \;//$$

<u>COROLÁRIO:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

<u>DEMONSTR.:</u> De fato, basta notar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1 \;//$$

1

$\square$

<u>COROLÁRIO:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctan} x}{x} = 1.$

<u>DEMONSTR.:</u> Provaremos apenas o primeiro limite, visto que a prova do segundo será análoga.

Efetuando uma mudança de variável, vem:

$$y = \arcsin x \iff x = \operatorname{sen} y$$

$$y \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \arcsin 0 = 0$$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \to 0} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right)}_{\to 1}{}^{-1}$$

$$= (1)^{-1} = 1.$$

$\square$

TEOREMA: (SEGUNDO LIMITE NOTÁVEL OU LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL)

Vale o limite:

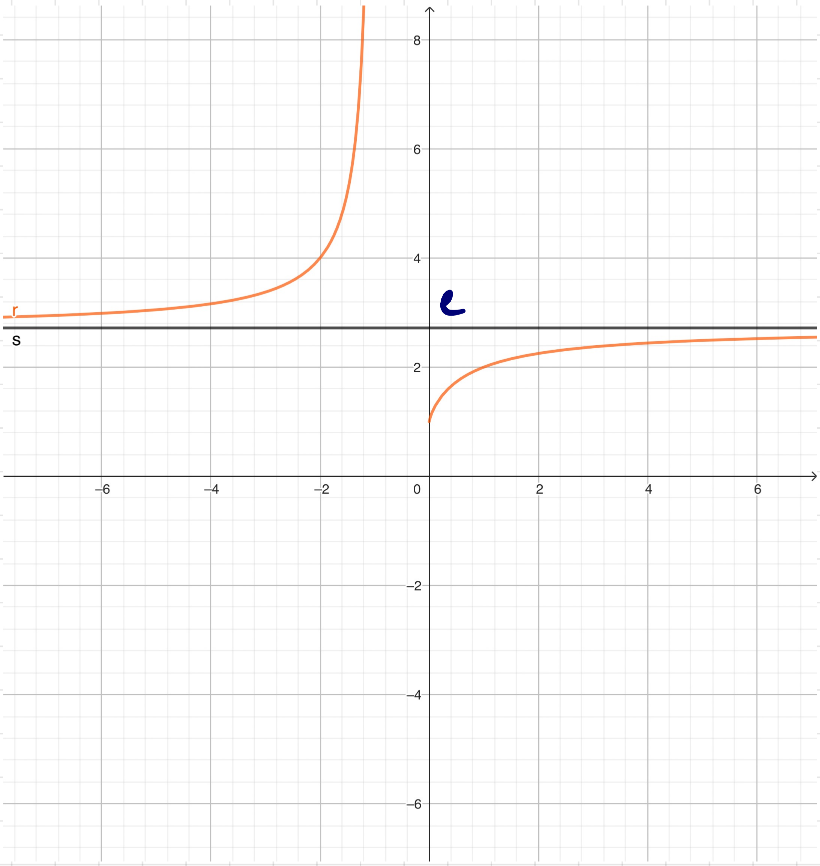
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

onde $e \cong 2{,}718$ é o número de Euler.

A demonstração é omitida por exigir conhecimentos que transcendem um curso de cálculo.

Faremos aqui apenas uma especulação tabular.

x	$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = (1,1)^{10} \cong 2,593742$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$ $(1,01)^{100} \cong 2,7048138$
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = (1,001)^{1000} \cong 2,7169239$
10.000	$(1,0001)^{10.000} \cong 2,71814593$
$\vdots \downarrow$	$\vdots$
$+\infty$	$e \cong 2,718281828\,4590$



→ pelo GeoGebra.

Também tem-se que

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Note que, para surgir este limite, devemos ter o símbolo 1^{∞} (INDETERM.)

Este tipo de indeterminação só é removido usando o segundo limite notável.

De fato, devemos mostrar sempre

$$\left(1 + \text{expressão}\right)^{\frac{1}{\text{expressão}}},$$

com expressão $\to 0$ quando $x \to \infty$.

Vejamos exemplos:

01) $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-5} = \left(1 + \frac{2}{+\infty}\right)^{+\infty} = 1^{+\infty} \text{ (INDET.)}$$

$$\left[\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}}_{e}\right]^{\frac{2}{x} \cdot (3x-5)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{6x-10}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{6\cancel{x}}{\cancel{x}}} = e^{6}$$

02) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x+3}$$

BASE: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{2x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}=1$

EXPOENTE: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x+3=+\infty$

$\Rightarrow 1^{+\infty}$ (INDET.)

INDICA O USO DO 2º LIMITE NOTÁVEL. ENTÃO, PRECISAMOS ESCREVER

$$\left(1+\text{expressão}\right)^{\frac{1}{\text{expressão}}}$$

Assim, teremos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\Bigg(1+\underbrace{\frac{2x-3}{2x-5}-1}_{\text{expressão}}\Bigg)^{x+3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{2x}-3-\cancel{2x}+5}{2x-5}\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-5}\right)^{x+3}=\Bigg[\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{2}}}_{e}\Bigg]^{\frac{2}{2x-5}\cdot(x+3)}$$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+6}{2x-5}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}}=e^1=e$$

03) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{x^2+x+7}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+4}}$$

BASE: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+5}{x^2+x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1.$$

EXPOENTE: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x}{2}=-(-\infty)=+\infty$$

$1^{+\infty}$ (INDET)

$$\left(1+\text{expressão}\right)^{\frac{1}{\text{expressão}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{x^2+x+7}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+4}}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\underbrace{\frac{x^2-3x+5}{x^2+x+7}-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\cancel{x^2}-3x+5-\cancel{x^2}-x-7}{x^2+x+7}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+4}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-5x-2}{x^2+x+7}\right)^{\frac{x^2+x+7}{-5x-2}}\right]^{\frac{(-5x-2)}{x^2+x+7}\cdot\frac{x^2-1}{2x+4}}=$$

e

$$=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-5\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}}=e^{-\frac{5}{2}}$$