CÁLCULO 1

05/12/23 – AULA 10

LIMITES DE FUNÇÕES:

A ideia intuitiva de limite é, dada uma função definida em um conj. X, onde $a \notin X$; o que acontece com as imagens $f(x)$ quando x é muito próximo do ponto a. (Note que, $\nexists f(a)$, neste caso).

Por exemplo, seja $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

Note que f não está definida em $x = 1$. (divisão por zero) [ALIÁS, SE TENTARMOS SUBSTITUIR x POR 1, VAMOS OBTER $\frac{0}{0}$, QUE INDICA UMA INDETERMINAÇÃO]

E próximo de $x = 1$, temos quais imagens?

Note que:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

$$\begin{array}{rr|l}
\cancel{x^2} - 4x + 3 & & x - 1 \\
\hline
-\cancel{x^2} + x & & x - 3 \\
\hline
-\cancel{3x} + \cancel{3} & & \\
+3x - 3 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
42 & 3 \\
\hline
-3 & 14 \\
\hline
12 & \\
-12 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)\cdot(x-3)$$

Logo, escrevemos:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(\cancel{x-1})\cdot(x-3)}{\cancel{x-1}} = x-3 \;;\; x \neq 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x-3 \;;\; x \neq 1.$$

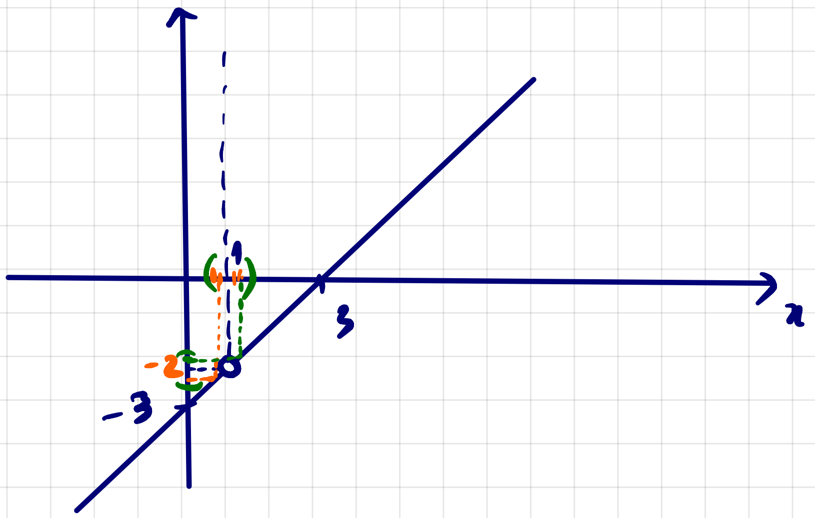
x	$f(x) = x-3;\ x \neq 1$
0,9	$0{,}9 - 3 = -2{,}1$
0,99	$0{,}99 - 3 = -2{,}01$
0,999	$0{,}999 - 3 = -2{,}001$
1,1	$1{,}1 - 3 = -1{,}9$
1,01	$1{,}01 - 3 = -1{,}09$

⋮

Ou seja, quando x se aproxima do 1, notamos que $f(x)$ se aproxima do -2.

Intuitivamente, isto significa que o limite da $f(x)$ quando x tende para 1 é igual a -2. Escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -2.$$



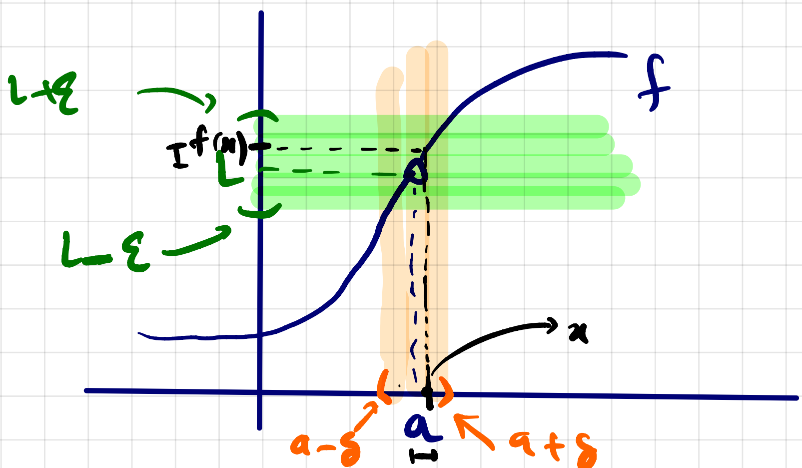
Esta é a ideia intuitiva de limite: uma aproximação de um ponto no eixo x gera uma aproximação L no eixo Y? (no caso, L = -2)

<u>Def.</u>: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função definida em x e $a \notin X$, mas um PONTO DE ACUMULAÇÃO do conj. X (i.e., podemos nos aproximar de $a \notin X$ por elementos de X). Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o LIMITE DE f(x) QUANDO x TENDE PARA a, e escrevemos

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \ \forall x \in X: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

OU SEJA, DADO UM "ERRO" DE APROX. $\varepsilon > 0$, VAI EXISTIR UM RAIO $\delta > 0$, TAL QUE TODO x DISTANTE DE a A MENOS DE δ POSSUIRÁ UMA IMAGEM f(x) DISTANTE DE L A MENOS DE $\varepsilon > 0$.



DADO $\varepsilon > 0$.

OBTEMOS $\delta > 0$.

Ex.: Mostrar que $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < \underbrace{|x-(-1)|}_{|x+1|} < \delta$, implique em $\underbrace{|f(x) - (-2)|}_{|f(x)+2|} < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x)+2|$:

$$|f(x)+2| = \left| \frac{x^2-1}{x+1} + 2 \right| = \left| \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} + 2 \right|$$

$$= |x-1+2| = |x+1| < \delta := \varepsilon.$$

Isso nós queremos.

Ou seja, basta tomar, neste caso $\delta = \varepsilon$.

Assim, $\forall \varepsilon > 0$, temos $\delta = \varepsilon$, e é tal que se $0 < |x-(-1)| < \delta \Rightarrow |f(x)-(-2)| < \varepsilon$.

Na prática, para calcular um limite, observamos se, ao substituirmos x pela tendência, se obtivermos $\frac{0}{0}$ (que é um símbolo de indeterminação), deveremos remover tal indeterminação mediante algum tipo de simplificação:

EXEMPLOS:

01) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1} \overset{\frac{0}{0}\ \text{(INDET.)}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(\cancel{x-1})(x-3)}{\cancel{x-1}} =$$

$\frac{0}{0}$ SIMPLIFICADO, i.e. REMOVIDO

$$= \lim_{x\to 1}(x-3) = 1-3 = -2$$

02) $8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{0}{0}$ (IND.)

$-1 \quad +1$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{8x^3+4x^2}{2x+1} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2(\cancel{2x+1})}{\cancel{2x+1}} =$$

$$\begin{array}{rr|l} 8x^3 & +4x^2 & 2x+1 \\ \cline{3-3} -8x^3 & -4x^2 & 4x^2 \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{1}{2}} 4x^2 = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

03) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(\cancel{x-3})\cdot(x-2)}{(\cancel{x-3})\cdot(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -5x & +6 & x-3 \\ \cline{4-4} -x^2 & +3x & & x-2 \\ \cline{1-3} & -2x & +6 & \\ & +2x & -6 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 9 & x - 3 \\ \hline \cancel{-x^2} + 3x & x + 3 \\ 3x - 9 & \\ -3x + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{4}-2}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (INDET)}$$

04) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} = ?$$

QUANDO ENVOLVE IRRACIONAL PRECISAMOS RACIONALIZAR.

$\sqrt{x} - a$. SEU FATOR RACIONALIZANTE SERÁ $\sqrt{x} + a$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (2)^2}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{(x+1)(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)} \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1+3} + 2)} = \frac{1}{2 \cdot (2+2)} = \frac{1}{8}$$

05) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}}{2-x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}\right)}{2-x} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{(2-x)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)} =$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)} =$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+1 \\ \hline x-2 & \\ -x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)}{-\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{-\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)}$

$= \dfrac{2+1}{-\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3}{-2\sqrt{2}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

---

06) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+2}-2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+2}-2} \times \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \times \dfrac{\sqrt{2x+2}+2}{\sqrt{2x+2}+2}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-(1)^2\right]\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{\left[\left(\sqrt{2x+2}\right)^2-(2)^2\right]\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{\underbrace{(2x+2-4)}_{2x-2}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{2\cancel{(x-1)}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2}+2}{2\left(\sqrt{x}+1\right)} = \dfrac{2+2}{2(1+1)} = 1$