LISTA 02

10. Calcule o valor numérico das expressões:

(a) $y = \dfrac{4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\tan^2 \frac{\pi}{6} - 1}$

$60°$ $45°$ $30°$

$180° \text{ — } \pi \text{ rad.}$

- $\cos \frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan \frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$y = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1}$$

$$y = \frac{2 - \sqrt{2}}{\frac{1}{3} - \frac{3}{3}}$$

$$y = \frac{2 - \sqrt{2}}{-\frac{2}{3}} = (2 - \sqrt{2}) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-6 + 3\sqrt{2}}{2}$$

(b) $y = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} + \tan \frac{3\pi}{4}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \tan 6\pi}$

$60°$

$\frac{\pi}{4}$

- $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan \frac{3\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
- $\tan 6\pi = \tan 0 = 0$

$$y = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - 0} = \frac{\frac{-\sqrt{2} + 2}{2}}{1 - 0}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

LISTA 01

18. As indicações R_1 e R_2, na *escala Richter*, de dois terremotos estão indicados pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2},$$

onde E_1 e E_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.
A tabela abaixo mostra algumas medidas, onde alguns dados estão faltando. Complete a tabela, de acordo com as definições dadas e seus conhecimentos.

R_1	R_2	E_1	E_2
8	6	10	x
5	7	y	13
z	9	2	20
7	7	10	10

obs.: NOT.: $\log a = \log_{10} a$

Olhando a 1ª linha da tabela, temos:

$R_1 = 8$, $R_2 = 6$; $E_1 = 10$; $E_2 = x$.

Pela fórmula dada temos:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \frac{E_1}{E_2}$$

$$8 - 6 = \log \frac{10}{x}$$

$$2 = \log \frac{10}{x} = \underbrace{\log_{10} 10}_{=1,\ \text{pois } \log_a a = 1} - \log x$$

$$\boxed{\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b}$$

$$\Rightarrow 2 = \underbrace{\log_{10} 10}_{=1} - \log_{10} x$$

$$2 = 1 - \log_{10} x$$

$$1 = -\log_{10} x \quad (\times -1)$$

$$\log_{10} x = -1$$

$\Downarrow$ def.

$$10^{-1} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$$

Pela segunda linha, temos: $R_1 = 5$; $R_2 = 6$; $E_1 = y$; $E_2 = 13$.

Então:

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2}$$

$$5 - 6 = \log_{10} \frac{y}{13}$$

$$-1 = \log_{10} \frac{y}{13} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 10^{-1} = \frac{y}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{y}{13} \Leftrightarrow 13 = 10y \Leftrightarrow y = \frac{13}{10} = 1,3$$

Por fim, pela linha 3, temos:

$R_1 = z$; $R_2 = 9$; $E_1 = 2$; $E_2 = 20$. Logo:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \frac{E_1}{E_2}$$

$$z - 9 = \log_{10} \frac{2}{20}$$

$$z - 9 = \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$z - 9 = \log_{10} 10^{-1}$$

$$z - 9 = -1 \cdot \underbrace{\log_{10} 10}_{=1}$$

$$z - 9 = -1$$

$$\boxed{z = 8}$$

LISTA 01

22. Determine o domínio máximo de cada função a seguir.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x^3 + \sqrt{x}}{3x - 6} + \ln(x^2 - 4x) - \pi^{1-x}$ $\in \mathbb{R}$

NOTAÇÃO: $\ln x = \log_e x$, onde $e \cong 2,718$.

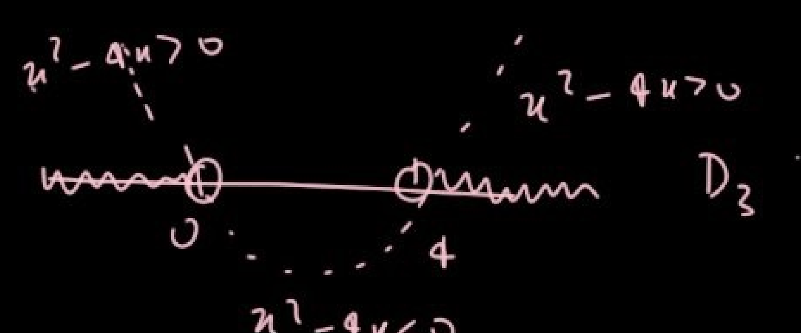
condições de existência:

- $x > 0$ — D_1: $(0, +\infty)$
- $3x - 6 \neq 0$
- $x^2 - 4x > 0$

$3x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq 6 \Leftrightarrow x \neq 2$ — D_2

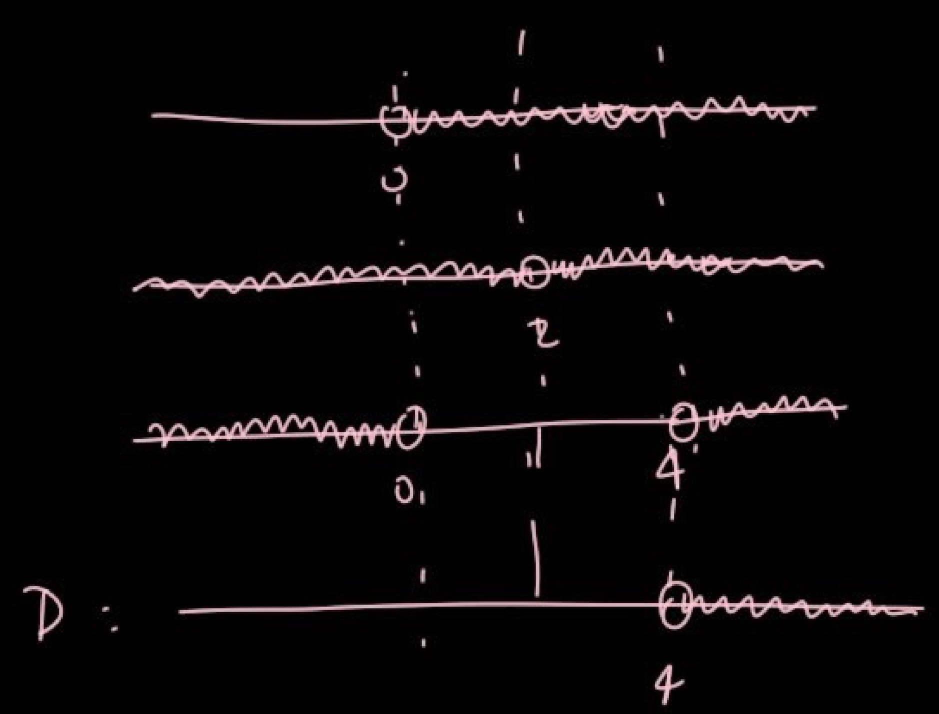
$x^2 - 4x = 0$ (zeros)

$x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$



O domínio D será

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \text{, i.e.,}$$

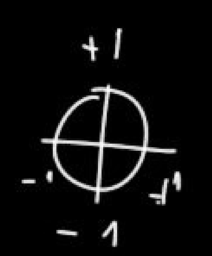


$$D(f) = (4, +\infty).$$

LISTA 02

23. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais temos

(a) $\operatorname{sen} x = 3k - 2$ (b) $\cos x = \dfrac{k+1}{k-1}$



(b) Como

$-1 \le \cos x \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então:

$$\underbrace{-1 \le \frac{k+1}{k-1}}_{(\mathrm{I})} \overbrace{\le 1}^{(\mathrm{II})}$$

Ou seja, precisamos estudar duas inequações.

- $\dfrac{k+1}{k-1} \geq -1 \iff \dfrac{k+1}{k-1} + 1 \geq 0 \iff \dfrac{k + \cancel{1} + k - \cancel{1}}{k-1} \geq 0$

$\iff \dfrac{2k}{k-1} \geq 0$ (etc.)

- mesmo raciocínio do exercício da aula 03 (1_0).

- $\dfrac{k+1}{k-1} \le 1 \iff \dots$ (etc.)

LISTA 02

28. Calcule o valor de $\cos x$, sabendo que $\cot x = \dfrac{2\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.

$m > 1$

$$\cot x = \frac{2\sqrt{m}}{m-1}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{m-1}{2\sqrt{m}}$$

Como $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$1 + \left(\frac{m-1}{2\sqrt{m}}\right)^2 = \sec^2 x$$

$$1 + \frac{m^2 - 2m + 1}{4m} = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x = \frac{4m + m^2 - 2m + 1}{4m}$$

$$\sec^2 x = \frac{m^2 + 2m + 1}{4m} = \frac{(m+1)^2}{4m}$$

$$\sec x = \pm\sqrt{\frac{(m+1)^{\cancel{2}}}{4m}} = \frac{m+1}{2\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \quad //$$

LISTA 02

17. Um medicamento é ministrado por via intravenosa para aliviar a dor. A função $f(t) = 90 - 52\ln(1+t)$, $0 \le t \le 4$, dá o número de unidades do medicamento remanescentes no corpo depois de t horas.

(a) Qual foi a quantidade inicial ministrada em termos de unidades do medicamento?

(b) Quantas unidades estarão presentes depois de duas horas?

$f(t)$ denota o n.º de unidades.

(a) $t=0$; $\quad f(0) = 90 - 52.\underbrace{\ln(1+0)}_{=0} = 90$

(b) $t=2$;

$f(2) = 90 - 52.\ln(1+2)$

$= 90 - 52\ln 3 \cong 90 - 57{,}12783901074170 4$

$\approx 32{,}87/21 \cong \underline{32{,}87}$

obs.: $\ln(1+t) = \log_e(1+t)$, onde $e \cong 2{,}718$

LISTA 01:

16. Um reator converte urânio 238, estável, no isótopo plutônio 239. O decaimento deste isótopo é dado por $A(t) = A_0 e^{-0{,}00002876t}$, onde $A(t)$ é a quantia do isótopo no instante t, em anos, e A_0 é a quantia original.

(a) Se $A_0 = 500$, quanto restará após um período de vida humana? (use $t = 70$ anos)

(b) Encontre a meia-vida dete isótopo.

$A(t) = A_0 . e^{-0{,}00002876t}$

(a) $a_0 = 500$; $\quad A(t) = ?$; $t = 70$

$A(70) = 500 . e^{-0{,}00002876 . 70}$

$\cong 500 . e^{-0{,}0020132} \cong 498{,}99$ de material.

(b) $t = ?$ tal que $A(t) = \frac{A_0}{2}$

$\frac{\cancel{A_0}}{2} = A(t) = \cancel{A_0} . e^{-0{,}00002876t}$

$e^{-0{,}00002876t} = \frac{1}{2}$

$\log_e e^{-0{,}00002876t} = \log_e \frac{1}{2}$

$-0{,}00002876 . t \underbrace{\log_e e}_{=1} = \underbrace{\log_e 1}_{=0} - \log_e 2$

$-0{,}00002876 . t = -\ln 2 \quad \cdot(-1)$

$t = \frac{\ln 2}{0{,}00002876} \cong 24101{,}08$ anos

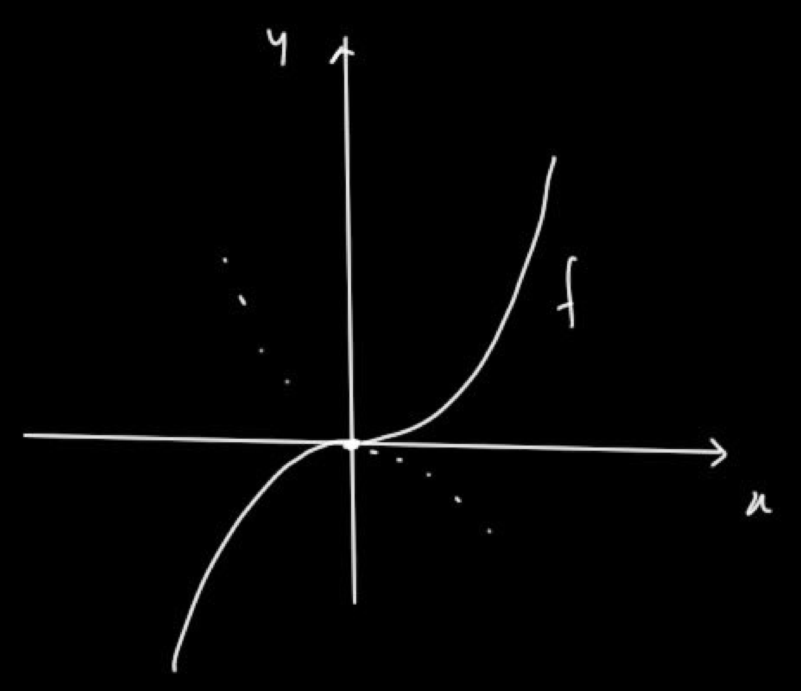
Lista 02

6. Esboçar os gráficos de $f(x) = x|x|$, $g(x) = x - |x|$, $h(x) = (x-1)|x+1|$ e $i(x) = 1 + |x - |x||$, indicando seus respectivos domínio e imagem.

$f(x) = x \cdot |x|$

Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, então:

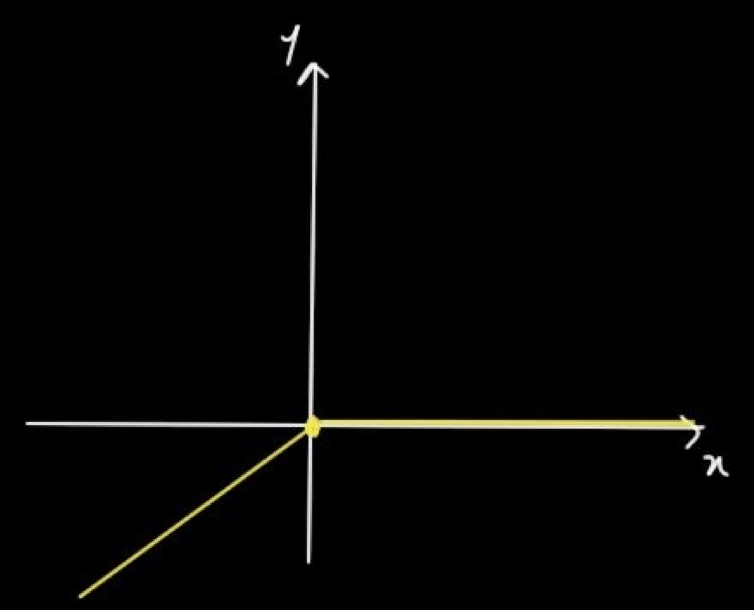
$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x \cdot x, & \text{se } x \geq 0 \\ x \cdot (-x), & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$$g(x) = x - |x| = \begin{cases} x - x, & \text{se } x \geq 0 \\ x - (-x), & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ 2x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (-\infty, 0]$

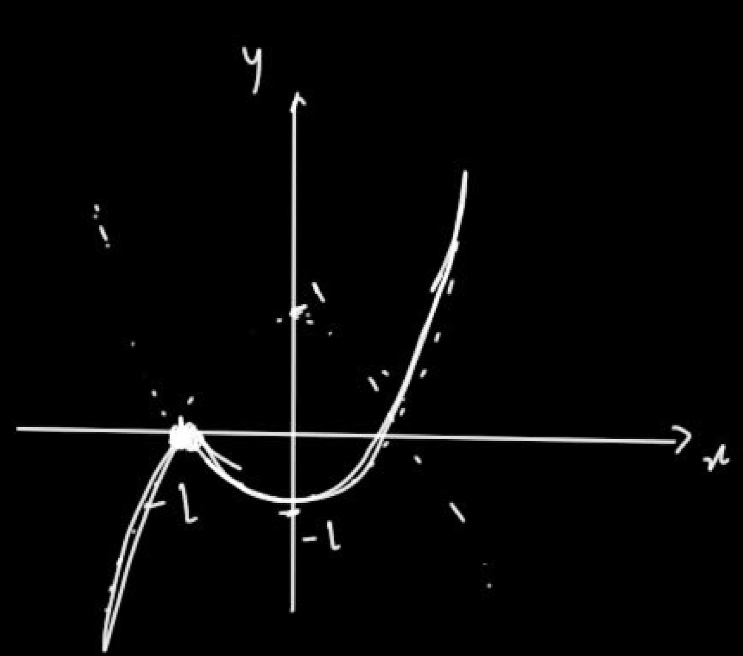
$h(x) = (x-1) \cdot |x+1|$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Assim, temos:

$$h(x) = (x-1) \cdot |x+1| = \begin{cases} (x-1)(x+1), & \text{se } x \geq -1 \\ (x-1) \cdot (-x-1), & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x^2 + 1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$.