Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - Integrais duplas

1. Calcule cada integral dupla a seguir:

   (a) $\displaystyle\iint_A \operatorname{sen}(x+y)dxdy$, onde $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) $\displaystyle\iint_A \frac{xy^2}{1+x^2}dxdy$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -3 \leq y \leq 3\}$.

   (c) $\displaystyle\iint_A x \operatorname{sen} xy\, dxdy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$. (Resp. π)

2. Calcule as integrais iteradas:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} (x+2y)dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2-y)dydx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \int_y^2 xydxdy$

   (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{1-x^2} 2x^2y^2dydx$ (e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen}\frac{x}{y}dxdy$

3. Em cada item a seguir, esboce o domínio Ω e calcule a integral indicada.

   (a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ e $f(x,y) = x^2y$.

   (b) Ω é o quadrado de vértices em $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$ e $f(x,y) = xe^y$.

   (c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \sin x,\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ e $f(x,y) = y$.

   (d) Ω é o domínio delimitado pela parábola $y = x^2$, o eixo horizontal e a reta $x = 1$ e $f(x,y) = xe^y$.

   (e) Ω é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ e $f(x,y) = y$.

4. Inverta a ordem de integração e a seguir calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^2}dxdy$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^2 ye^{xy}dxdy$

5. Calcule cada integral dupla abaixo.

   (a) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{2y}{x^3+2}dA$, onde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$.

   (b) $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)dA$, onde Ω é limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

   (c) $\displaystyle\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}}dA$, onde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq y \leq 2,\; y \leq x \leq y^3\}$.

6. Calcule o volume do sólido abaixo do plano $x + 2y - z = 0$ e acima da região limitada por $y = x$ e $y = x^4$.

7. Calcule o volume do sólido abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo de vértices em $A(1,1)$, $B(4,1)$ e $C(1,2)$.

8. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante.

9. Use coordenadas polares para calcular cada integral a seguir.

   (a) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq r^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$ (b) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ (c) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq r^2} x^2e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$

10. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}(x+y)dxdy$, onde Ω é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

11. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\cos(x^2+y^2)dxdy$, onde Ω é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

12. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\arctan\frac{y}{x}dA$, onde Ω é a região do primeiro quadrante compreendida entre dois círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$.

13. Calcule as seguintes integrais, efetuando uma mudança de coordenadas convenienete em cada caso.

   (a) $\displaystyle\iint_{\Omega}\frac{(x+y)^7}{y-x}dxdy$, onde Ω é a região limitada pelas retas $y-x=3$, $y-x=1$, $y+x=3$ e $y+x=4$. (Resp.: $(\frac{4^8}{8}-\frac{3^8}{8})\frac{\ln 3}{2}$)

   (b) $\displaystyle\iint_{\Omega}(x-y)^2\sin(x+y)dxdy$, onde Ω é o paralelogramo de vértices em $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

14. Calcule a integral dupla

$$\iint_{\Omega}\sqrt{x+y}\,\ln(x-3y)dxdy,$$

   onde Ω é o quadrilátero $ABCD$ de vértices $A(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{9}{4}, -\frac{1}{4})$, $C(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $D(1, 0)$.

15. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\frac{\cos(x-y)}{\sin(x+y)}dxdy$, onde Ω é o trapézio formado por $1 \leq x+y \leq 2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

16. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$, onde Ω é a região trapezoidal com vértices em $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ e $D(0, 1)$.

17. Calcule a integral $\displaystyle\iint_{\Omega}(x+y)^2\sin^2(x-y)dxdy$, onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \pi\}$.