

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Integrais múltiplas (primeiros conceitos)

1. Sejam $P = \prod P_i$ e $Q = \prod Q_i$ partições de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Justifique através de um exemplo que a união $P \cup Q$ não é, em geral, uma partição de A . Em seguida, conclua que a partição $P + Q$ definida por

$$P + Q = \prod_{i=1}^m (P_i \cup Q_i)$$

é um refinamento para P e para Q .

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do \mathbb{R}^m , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, e sejam

$$m = \inf\{f(x) : x \in A\} \text{ e } M = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Mostre que

$$m \leq \frac{\int_A f(x) dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

3. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A , conclua que existe $c \in A$ tal que¹

$$\int_A f(x) dx = f(c) \cdot \text{Vol}A.$$

4. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 2).

(a) $\int_R \int (x^2 + y^2) dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

(b) $\int_R \int e^{xy} dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

(c) $\int_A (x + y)e^{yz} dx dy dz$, onde A é o bloco $[1, 3] \times [0, 2] \times [1, 4]$.

5. Usando a definição de integral dupla como limite de somas de Riemann, calcule a integral $\int_A f(x, y) dx dy$, sendo:

(a) $f(x, y) = x + 4y$, e A o bloco $[0, 2] \times [0, 1]$. (Resp.: 6)

(b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y$, e A o bloco $[0, 2] \times [0, 1]$. (Resp.: 10)

(c) $f(x, y) = x^2 + 3y$, e A o bloco $[0, 2] \times [1, 5]$.

6. Justifique por que a bola fechada $B[a, r] \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto J - mensurável.

¹usar o Teorema do valor intermediário