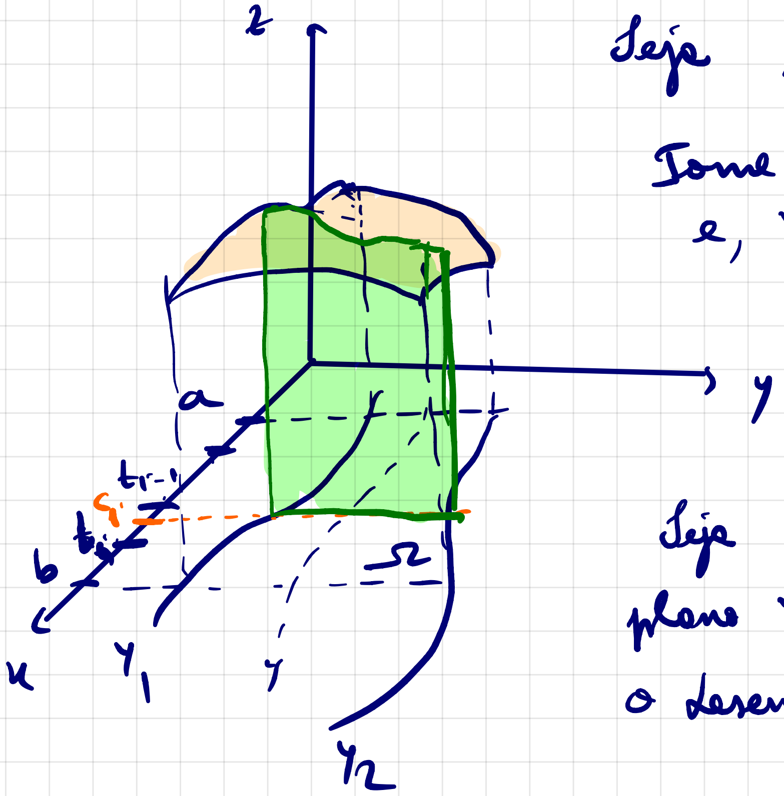
17/11/23 – AULA 06

CASO GERAL: Quando Ω é limitado por pelo menos uma curva. Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável no conjunto J-mensurável Ω, limitado por funções y_1 e y_2, no intervalo $[a,b]$ no eixo $0x$.
(embora este seja um caso, todo o resto se generaliza analogamente). Assuma $f \geq 0$.



Seja y entre y_1 e y_2;

Tome P partição de $[a,b]$ e, $\forall\, [t_{i-1}, t_i] \in P$, tome $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Seja a lâmina paralela ao plano YZ, passando por c_i, c.f. o desenho.

A medida da área desta lâmina é dada por:

$$A(c_i) = \int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y)\, dy$$

Pelo princípio de Cavalieri, o volume V do sólido abaixo da superfície $z = f(x,y)$ na região Ω será dado por:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i) \cdot \Delta x_i \quad ; \quad \Delta x_i = t_i - t_{i-1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y)\, dy \right) \cdot \Delta x_i$$

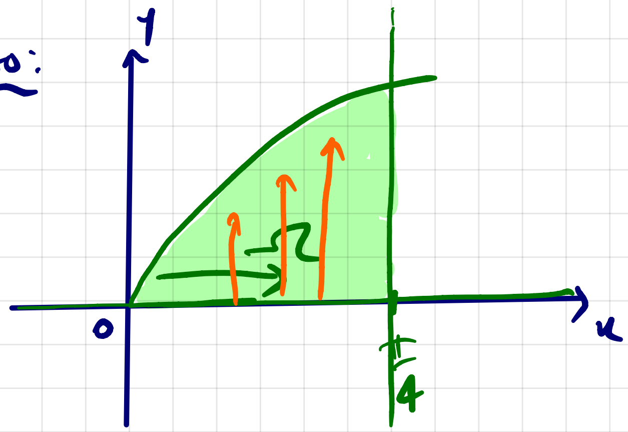
$$= \int_a^b \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy \right) dx \quad , \quad i.e., \text{ uma}$$

integração iterada, onde exige-se que a integral mais externa seja limitada por constantes.

Vejamos alguns exemplos de aplicações:

01) $\iint_{\Omega} \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x})\, \underbrace{dx\,dy}_{dA}$, onde Ω é a região limitada por $\underbrace{y=0}_{\text{eixo } x}$, $x = \frac{\pi}{4}$ e pela curva $y = \sqrt{x}$.

SOLUÇÃO:



$$\iint_{\Omega} \sqrt{x} \cdot \cos(y\sqrt{x})\, dx\, dy = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{é constante para } y} \cdot \cos(y\sqrt{x})\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \cos(\underbrace{y\sqrt{x}}_{v}) (\underbrace{\sqrt{x}\,dy}_{dv}) \right) dx =$$

$$\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C$$

$$v = y\sqrt{x}$$

$$\hookrightarrow dv = \sqrt{x}\cdot dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(y\sqrt{x}) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0}) dx$$

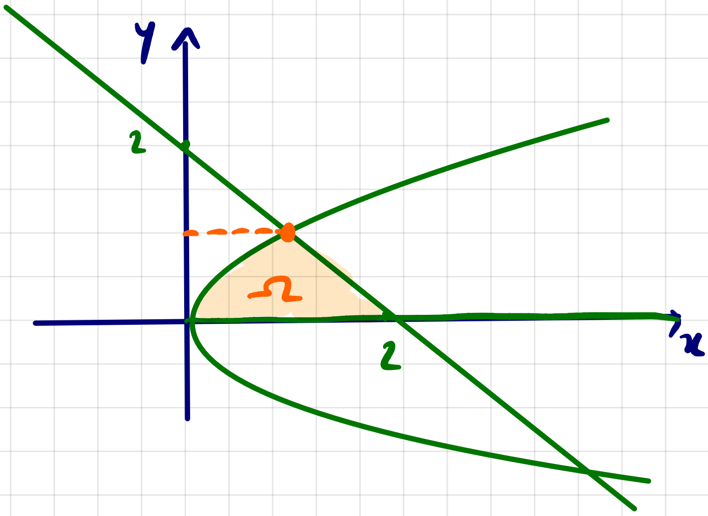
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

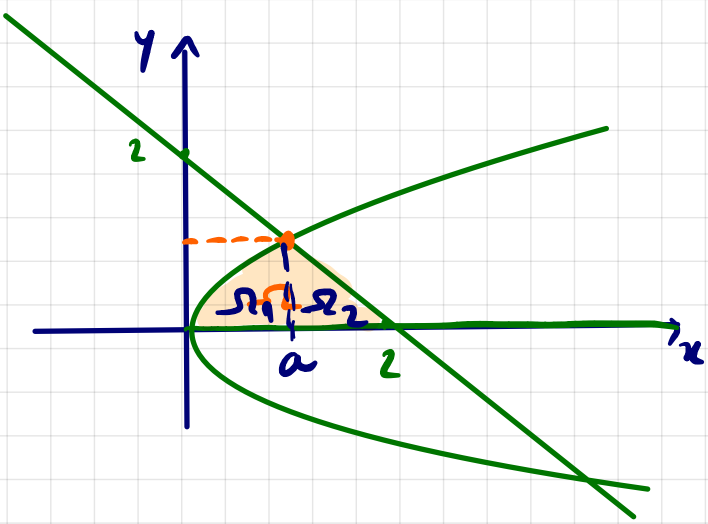
02) $\iint_{\Omega} x\sqrt{y}\,dx\,dy$, onde Ω é formado pelas retas $y=0$, $x+y=2$ e pela parábola $x=y^2$, no 1º q

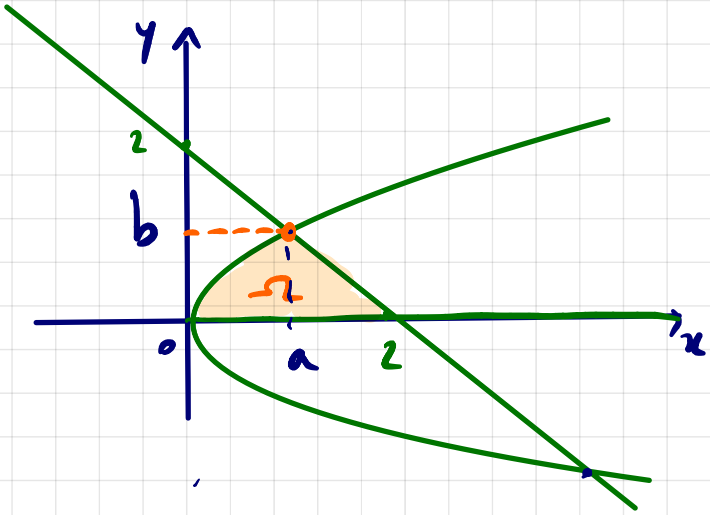
$y = 2 - x$

SOLUÇÃO:



Temos duas formas de resolver:





$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f$$

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f + \int_{x=a}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2-x} f$$

ou: $$\iint_{\Omega} f = \int_{y=0}^{y=b}\int_{x=y^2}^{x=2-y} f$$

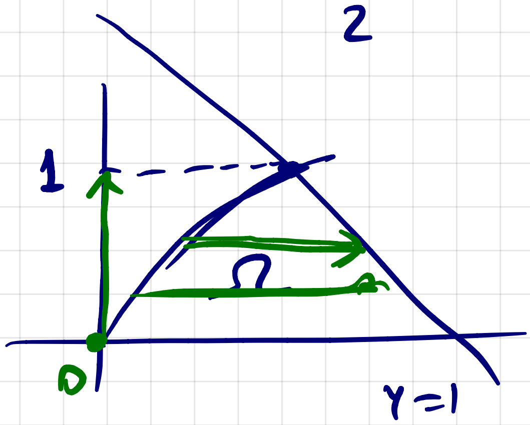
ESTA FORMA DE CALCULAR PARECE MELHOR.

b é a imagem quando

$$\begin{cases} x = 2-y \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2-y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \begin{cases} \nearrow \ y = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \searrow \ y = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$



$$\iint_{\Omega} x\sqrt{y}\, dx\, dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=y^2}^{x=2-y} x \underbrace{\sqrt{y}}_{} \, dx \right) dy$$

CONSTANTE PARA x.

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \left(\int_{x=y^2}^{x=2-y} x\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=y^2}^{x=2-y} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \cdot \left(\frac{(2-y)^2}{2} - \frac{y^4}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(4 - 4y + y^2 - y^4 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4y^{\frac{1}{2}} - 4y \cdot y^{\frac{1}{2}} + y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}} - y^4 \cdot y^{\frac{1}{2}} \right) dy$$

$$= 2\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - 2\int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{5}{2}} dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{9}{2}} dy$$

$$= \left(2 \cdot \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{y^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{11/2}}{\frac{11}{2}} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{3} y^{3/2} - \frac{4}{5} y^{5/2} + \frac{1}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{11} y^{\frac{11}{2}} \right) \Bigg|_0^1 =$$

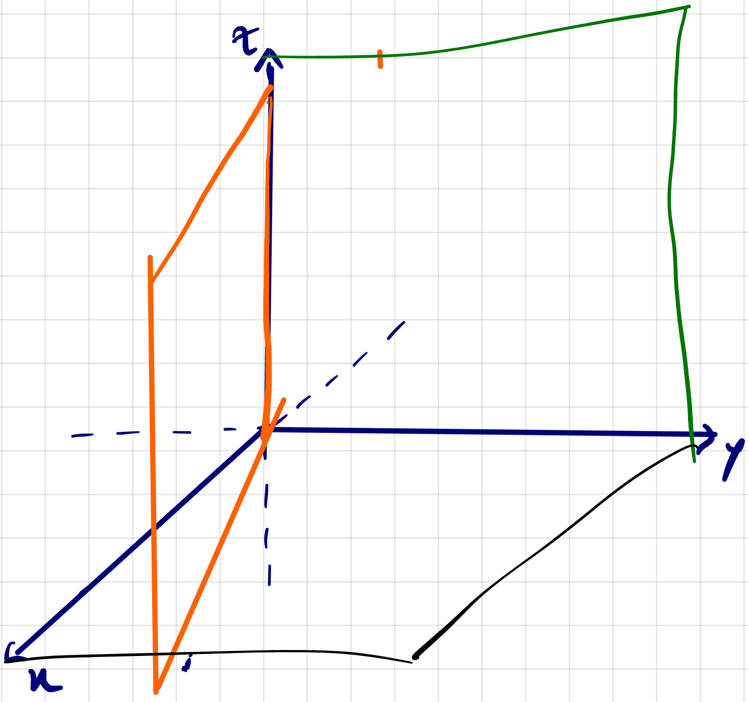
$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - 0 = \dots$$

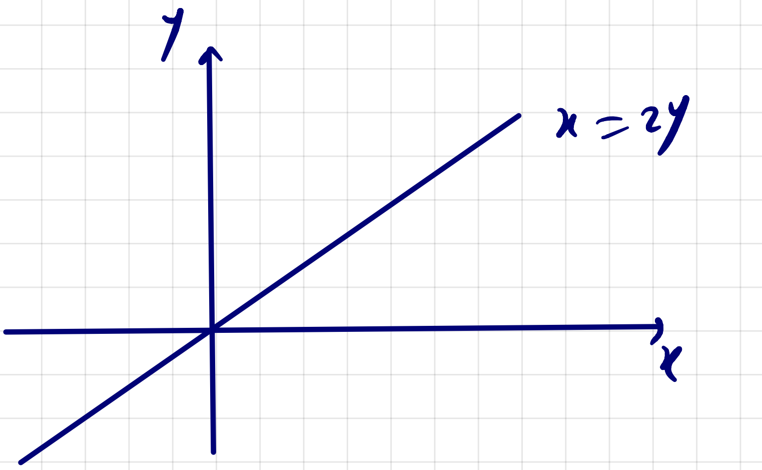
---

03) Obter o volume do tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $\underbrace{x=0}_{\text{PLANO } zy}$ e $\underbrace{z=0}_{\text{PLANO } xy}$.

Solução:

$$z = 2 - x - 2y$$
$$\|$$
$$f(x,y)$$

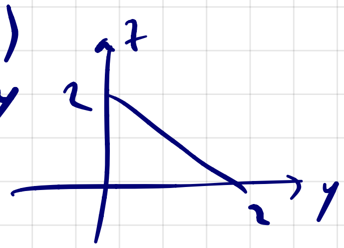




$z = 2 - x - 2y$ traços:

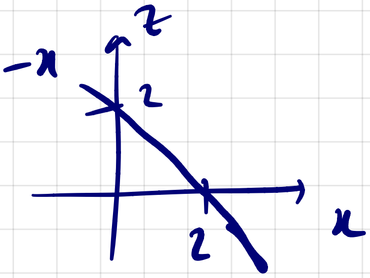
- $x = 0$: (plano yz)

$z = 2 - 2y$



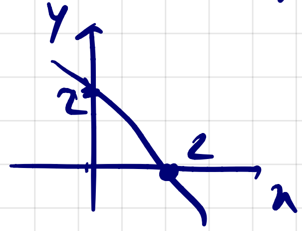
- $y = 0$ (plano xz)

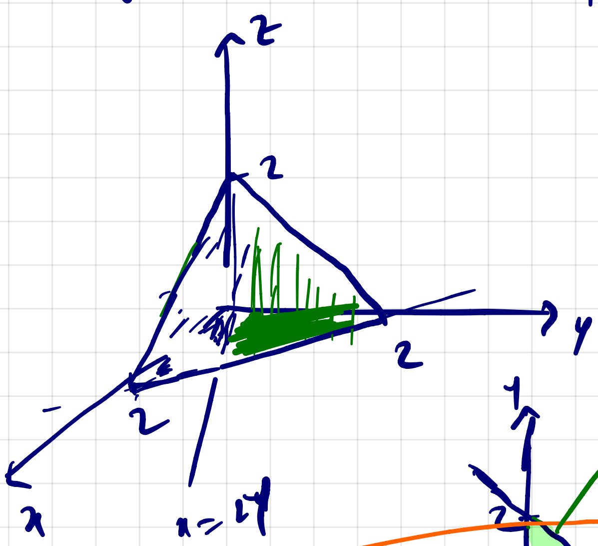
$z = 2 - x$

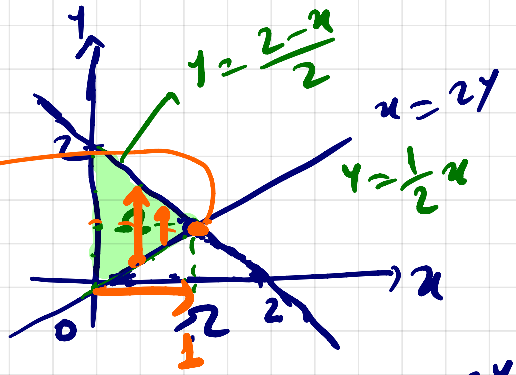


- $z = 0$ (plano xy)

$x = 2 - 2y$







$x = 2 - 2y$

Portanto, a medida do volume V procurado será:

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \qquad \text{NOT.: } [\, d_A = dx\,dy \text{ ou } dy\,dx \,]$$

INTERSECÇÃO:

$x = x$

$2y = 2 - 2y$

$4y = 2$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Ou seja, obtemos:

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\frac{2-x}{2}} f(x,y)\,.\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\frac{2-x}{2}} (2-x-2y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(2y - xy - y^2\right)\Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=\frac{2-x}{2}} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(2-x - x\cdot\left(\frac{2-x}{2}\right) - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 - \left[x - x\cdot\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right] \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 - x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{4-4x+x^2}{4} - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\underline{2} - 3x + x^2 \cancel{+ \frac{x^2}{4}} \underline{-1} + x \cancel{- \frac{x^2}{4}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x + x^2)\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

04) Calcule $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx$

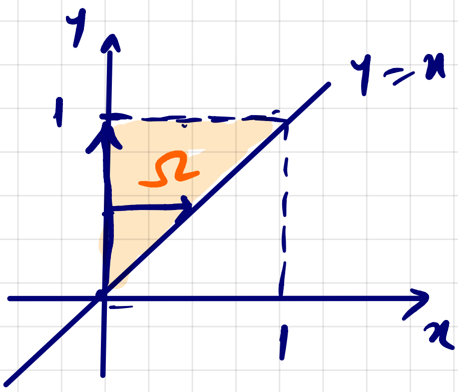
Neste caso, o problema concentra-se em

$$\int \operatorname{sen} y^2 \, dy = ?$$

Não existe uma técnica de integração para resolver isto.

Nestes casos a única saída é trocar a ordem de integração. Isto deve alterar os limites de integração também. De fato:

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} \underbrace{\operatorname{sen} y^2}_{\text{é constante para } x} \, dx \right) dy =$$



$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \cdot \int_{x=0}^{x=y} 1 \, dx \; dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \cdot x \Big|_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \cdot (y - 0) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sen} y^2 (2y \, dy) = -\frac{1}{2} \cos y^2 \Big|_0^1 =$$

$\int \operatorname{sen} u \, du \quad u = y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy$

$$= -\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \cos 0$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 1)$$

05) Esboce a região de integração e faça a mudança de ordem de integração para

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx .$$

(para entregar na quarta)

$\hookrightarrow$ por - e - mail.