CÁLCULO IV. $\boxed{08/11/23 \text{ — AULA 04}}$

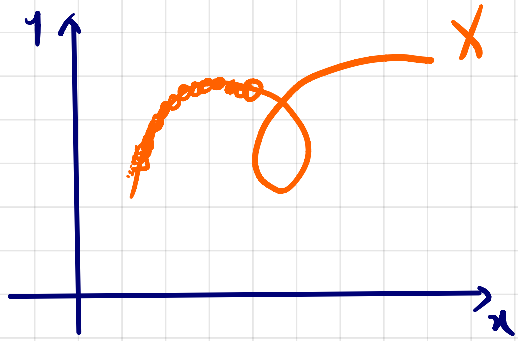
Até aqui estudamos integrais de funções limitadas $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, sendo A um bloco do $\mathbb{R}^m$. No caso do cálculo II (integrais de funções de uma variável real), cuja integral definida era calculada em intervalos $[a,b]$, os mesmos já são blocos em $\mathbb{R}$. Então o estudo nesses blocos já contemplava os problemas. No entanto, em mais variáveis, precisamos extender a teoria para regiões mais gerais do que simplesmente blocos do $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc.

CONJUNTOS DE MEDIDA NULA:

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto. Dizemos que X possui medida nula, e escrevemos $\text{med}(X) = 0$, se, e só se, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ sequência (C_m) de abertos tal que

$$X \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \quad \text{e} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \text{vol}(C_m) < \varepsilon.$$

Ex.: em $\mathbb{R}^2$:



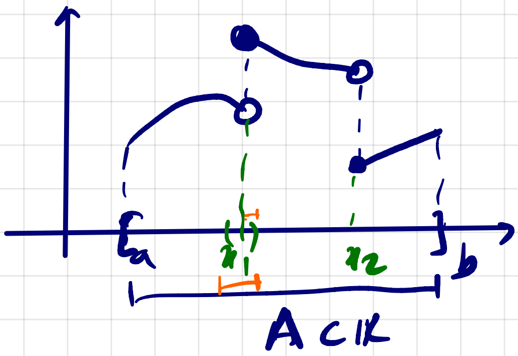
GEOMETRICAMENTE TERÍAMOS QUE O VOLUME DA CURVA X, EM $\mathbb{R}^2$, SERÁ NULO.

" ÁREA

TEOREMA DE LEBESGUE Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável em A se, e somente se, o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula.

(A DEMONSTR. FOGE DE UM CURSO DE CÁLCULO)

EX.: 01)



$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

NESTE CASO;

$D_f = \{x_1, x_2\}$

$\forall \varepsilon > 0$..

$C_1 = B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x_1)$; $C_2 = B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x_2)$

$D_f \subset C_1 \cup C_2$ e

$$\sum_{i=1}^{2} \text{Vol } C_i = \text{Vol } C_1 + \text{Vol } C_2$$

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10}$$

$$= \frac{2\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

02) A função Dirichlet

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

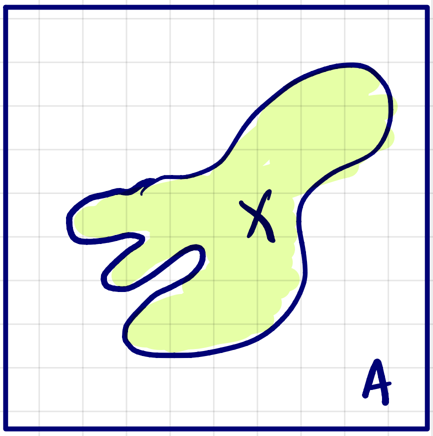
não é integrável. De fato, basta observar que o conj. D_f dos pontos de descontinuidade de f

será todo o intervalo $[0,1]$; e obviamente

$$\text{med}\, D_f = \text{med}\,[0,1] = 1-0 = 1 \neq 0.$$

CONJUNTOS J-MENSURÁVEIS (JORDAN-MENSURÁVEIS)

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto qualquer, limitado.



Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$.

Definimos a função característica em X por: $\xi_X : A \to \mathbb{R}$ pondo

$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X \end{cases}$$

FATO IMPORTANTE: Os pontos de descontinuidade da função característica ξ_X ocorrem na fronteira de X, i.e; em ∂X.

Não é difícil observar que a função característica cumpre as seguintes propriedades:

(a) $\xi_{X \cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$

(b) $\xi_{X \cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X \cap Y}$

(c) $X \subset Y \Rightarrow \xi_X \leq \xi_Y$.

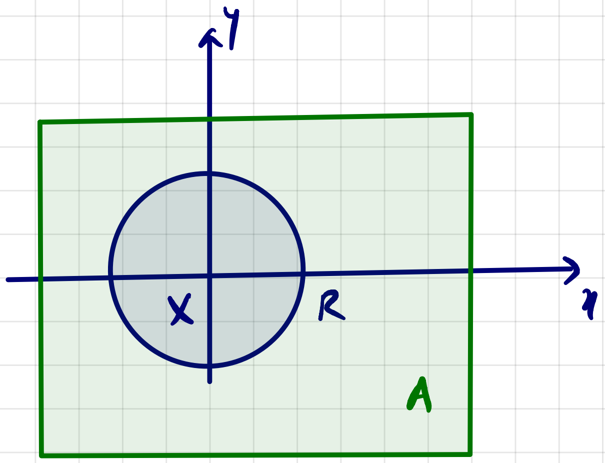
Frente a este conceito, definimos:

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é <u>J-mensurável</u> (mensurável segundo Jordan) se, e só se a função característica $\xi_X : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for integrável.

Neste caso, o volume de X é dado por

$$\operatorname{Vol} X = \int_A \xi_X(x)\, dx$$

Ex.: $X = (B_R(0), d_2)$



Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um bloco (retângulo) tal que $X \subset A$.

Então:

$$\operatorname{Vol}(X) = \int_A \xi_X(x)\, dx$$

que, neste caso, é uma área.

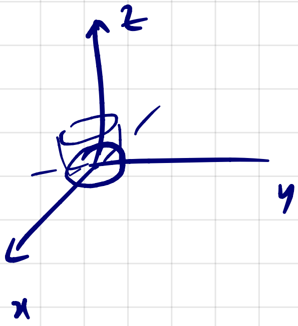
$$= \int_X \underbrace{\xi_X(x)}_{=1} dx + \int_{A \setminus X} \underbrace{\xi_X(x)}_{=0} dx = \int_X 1\, dx + 0$$

$A = X \cup (A \setminus X)$

— união disjunta —

$$= \pi R^2 \cdot 1 = \underline{\pi R^2}$$

vol. cilindro de altura 1



PROP. (*) Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Então, X será J-mensurável se, e somente se, $\text{med}(\partial X) = 0$.

DEMONSTR.: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$. Assim:

$X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ξ_X for integrável em A.

$$\Updownarrow \text{ T. de Lebesgue}$$

$$\text{med}(D_{\xi_X}) = 0$$

$$\Updownarrow \text{ c.f. FATO IMPORTANTE}$$

$$\text{med}(\partial X) = 0$$

$\square$

No que segue, vamos definir $\int_X f$, sendo X um conj. J-mensurável.

Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^m$ conj. J-mensurável

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$.

Defina a extensão $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(x) = f(x) . \xi_X(x)$$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X. \end{cases}$$

Assim, temos:

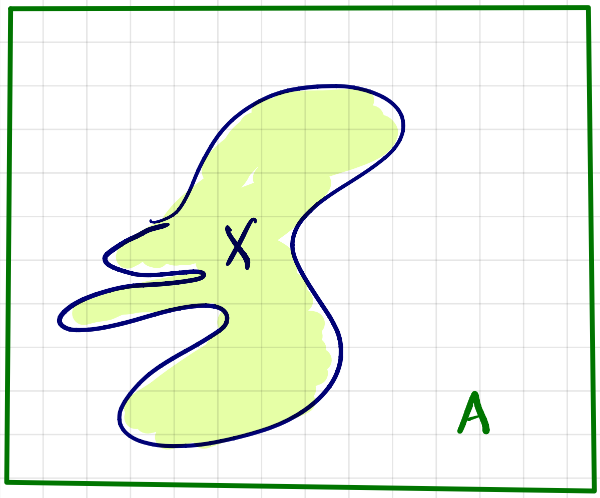
$$\int_A \tilde{f}(x)\,dx = \int_A f(x)\cdot \xi_X(x)\,dx =$$

$$= \int_X f(x)\cdot \underbrace{\xi_X(x)}_{=1}\,dx + \int_{A\setminus X} f(x)\cdot \underbrace{\xi_X(x)}_{=0}\,dx$$

$$= \int_X f(x)\,dx$$

Ou seja, definimos

$$\int_X f = \int_A \tilde{f}$$



Ou seja, a integral em um conj. J-mensurável pode ser calculada pensando na integral em um bloco que o contenha, visto que usamos a $\tilde{f}$ extensão c.f. acima definida. Dessa forma calculando $\int_A \tilde{f}$ sabemos que fora de X a integral se anula, restando apenas $\int_X f$, que nos interessa.

TEOREMA: Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis no conjunto J-mensurável X. Então:

(i) $f+g$ é integrável, e

$$\int_X (f+g) = \int_X f + \int_X g .$$

(ii) $c \cdot f$ é integrável $(c \in \mathbb{R})$, e

$$\int_X c \cdot f = c \cdot \int_X f .$$

(iii) se $f \geq 0$, então $\int_X f \geq 0$. Além disso, se $f \geq g$ em X então $\int_X f \geq \int_X g$.

(iv) $\left| \int_X f \right| \leq \int_X |f| .$

(v) $X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 - J mensuráveis e disjuntos, então

$$\int_X f = \int_{X_1} f + \int_{X_2} f .$$

DEMONSTR.: Provaremos apenas o item (i):

(i) Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$.

Define as extensões

$$\tilde{f}, \tilde{g} : A \to \mathbb{R} \text{ por}$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \xi_X(x) \quad \text{e}$$

$$\tilde{g}(x) = g(x) \cdot \xi_X(x) \,.$$

Então:

$$\int_X f+g = \int_A \tilde{f}+\tilde{g} = \int_A \tilde{f} + \int_A \tilde{g} = \int_X f + \int_X g$$

c.f. TEOR. DAS PROPRIEDADES DA INT. EM UM BLOCO.

$\square$

PROPOSIÇÃO: ("UPGRADE" DO TEOR. DE LEBESGUE)

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada num conjunto J-mensurável X. Então, f é integrável em X se, e somente se, o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$, onde X é um conj. J-mensurável.

Seja $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ a extensão de f.

Por construção de $\tilde{f}$ temos que todos os pontos de descontinuidade de f são pontos de descontinuidade de $\tilde{f}$, ou seja,

$$D_f \subset D_{\tilde f}.$$

Além disso, como $\tilde f = f \cdot \xi_X$, então as descontinuidades de $\tilde f$ são as descontinuidades de f mais a fronteira de X, ou seja,

$$D_f \subset D_{\tilde f} \subset D_f \dot{\cup} \partial X$$

união disjunta.

$$\Rightarrow \text{med}(D_f) \leq \text{med}(D_{\tilde f}) \leq \text{med}(D_f) + \underbrace{\text{med}(\partial X)}_{=0}$$

Como X é $\mathcal{J}$-mensurável, pela PROP. (*) segue que $\text{med}(\partial X) = 0$. Assim, obtemos:

$$\text{med}(D_f) \leq \text{med}(D_{\tilde f}) \leq \text{med}(D_f)$$

Então $\text{med}(D_f) = 0 \Leftrightarrow \text{med}(D_{\tilde f}) = 0$.

Note que

$$\text{med}(D_{\tilde f}) = 0 \overset{\text{Teor. de Lebesgue}}{\Longleftrightarrow} \tilde f \text{ for integrável no bloco } A \Leftrightarrow f \text{ integrável em } X$$

Ou seja,

$$\text{med}(D_f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ é integrável em } X.$$

$\square$