01/11/23 — AULA 03

02) Seja $A = [1,3] \times [2,5]$, e defina $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = x \cdot y$. Calcule, usando a definição,

$$\int_A f.$$

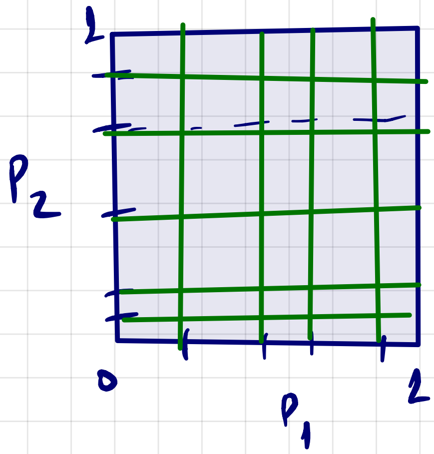
[EXERCÍCIO PARA ENTREGAR ATÉ QUARTA]

03) $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q}. \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(uma variante da função de Dirichlet)

Seja P uma partição qualquer de $[0,1] \times [0,1]$ que divide tal bloco em sub-blocos $B \in P$.



$P = P_1 \times P_2$

Como o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, e isto significa que, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$ [OU SEJA, SEMPRE EXISTE UM NÚMERO RACIONAL ENTRE

DOIS NÚMEROS REAIS], e como o conj. $\mathbb{I}$ dos números irracionais também é denso em $\mathbb{R}$ (i.e., $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, $\exists\, a \in \mathbb{I}$ tal que $x < a < y$), segue que $\forall\, B \in P$ sub-bloco de P vai existir par ordenado (x, y), com $x, y \in \mathbb{Q}$ e vai existir par ordenado (x, y) com $x \notin \mathbb{Q}$ ou $y \notin \mathbb{Q}$. Disso^(*),

$$M_B = \sup B = 1 \qquad e \qquad m_B = \inf B = 0,$$

e com isso obtemos:

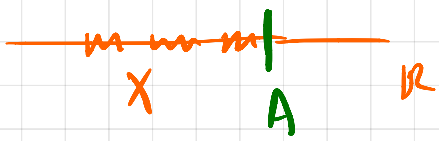
$$S(f;P) = \sum_{B \in P} \underbrace{M_B}_{=1} \cdot \operatorname{Vol}(B) = \sum_{B \in P} \operatorname{Vol}(B) = \operatorname{Vol}(A)$$

$$= (1-0)\cdot(1-0) = 1,$$

$\forall\, P$ partição do bloco A, em particular para a partição que fornece o ínfimo das somas superiores, ou seja,

$$\overline{\int_A} f = 1.$$

(*) <u>obs.</u>: Lembrando: um conj. $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, se $\forall x \in X$, $\exists\, A \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq A$. Tal A é uma cota superior para X.



Se tem uma cota superior, então tem infinitas: $A+1$, $A+2$, $A+3$, ... no ex. acima.

O supremo de X é a menor das cotas superiores, e é denotado por $\sup X$. Análogo para o ínfimo.

No entanto,

$$s(f;P) = \sum_{B\in P} \underbrace{m_B}_{=0} \cdot \mathrm{Vol}(B) = 0, \quad \forall\, P \text{ partição}$$

do bloco. Em particular para a partição que fornece o supremo das somas inferiores, ou seja,

$$\underline{\int_A} f = 0.$$

Portanto, temos:

$$\underline{\int_A} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_A} f, \quad \text{ou seja,}$$

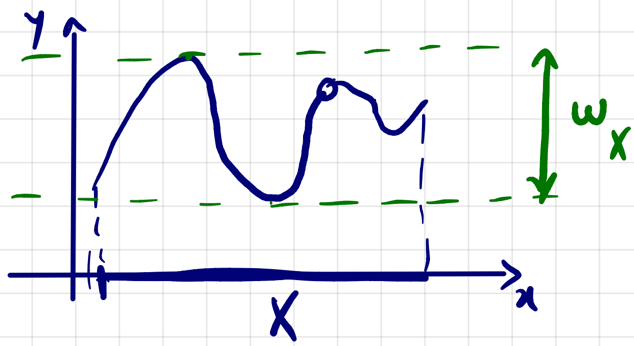
f não é integrável.

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto qualquer e seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

Definimos a OSCILAÇÃO de f no conj. X por

$$\omega_X = M_X - m_X = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x).$$

Ex.: $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



PROPOSIÇÃO: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável em A se, e somente se, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, P$ partição do bloco A, tal que

$$\sum_{B \in P} \omega_B \cdot \mathrm{Vol}(B) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.: Basta observarmos que, $\forall\, P$ partição de A:

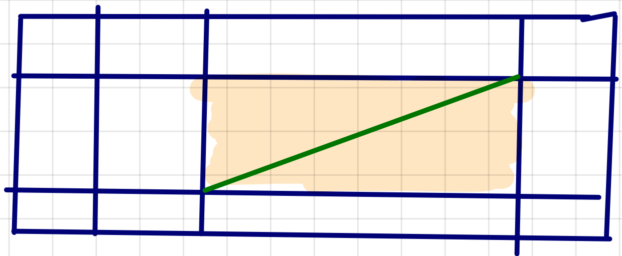
$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{B \in P} M_B \cdot \mathrm{Vol}(B) - \sum_{B \in P} m_B \cdot \mathrm{Vol}(B)$$

$$= \sum_{B \in P} \underbrace{(M_B - m_B)}_{= \omega_B} \cdot \mathrm{Vol}(B) = \sum_{B \in P} \omega_B \cdot \mathrm{Vol}(B),$$

e então o resultado segue diretamente do critério de integrabilidade mostrado na aula anterior.

$\square$

Def.: Dado $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$. Seja P uma partição do bloco A. Definimos a <u>norma</u> da partição P, e denotamos por $\|P\|$, como sendo o comprimento da diagonal do maior sub-bloco da partição P.



A

PROP.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função contínua no bloco A. Então, f é integrável nesse bloco.

DEMONSTR.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua no bloco A. Como A é compacto [pois é limitado e fechado], então f é uniformemente contínua, ou seja, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in A$ com

$$\|x-y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(A)}.$$

Seja P uma partição qualquer de $A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\|P\| < \delta$. Então, $\forall B \in P$ sub-bloco da partição P, temos que, $\forall x, y \in B$, $\|x-y\| < \delta$.

Assim, neste caso, devido à continuidade uniforme, temos $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(A)}$. Em particular

$$\omega_B = M_B - m_B < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(A)}.$$

Disso, temos:

$$\sum_{B \in P} \overbrace{\omega_B}^{<\varepsilon} \cdot \text{Vol}(B) < \sum_{B \in P} \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(A)} \cdot \text{Vol}(B) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(A)} \cdot \underbrace{\sum_{B \in P} \text{Vol}(B)}_{\text{Vol}(A)} = \frac{\varepsilon}{\cancel{\text{Vol}(A)}} \cdot \cancel{\text{Vol}(A)} = \varepsilon.$$

Ou seja, mostramos que, $\sum_{B \in P} \omega_B \cdot \text{Vol}(B) < \varepsilon$, $\forall B \in P$, i.e., f é integrável em A.

$\square$

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA)

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis no bloco $A \in \mathbb{R}^m$. Então, valem as propriedades:

(a) $f+g$ é integrável, e

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

(b) $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ é integrável, e

$$\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f.$$

(c) Se $f \geq 0$ em A, então $\int_A f \geq 0$

Além disso, se $f \geq g$ em A, então

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

(d) $$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

(e) $A = B \dot{\cup} C$ (UNIÃO DISJUNTA), então

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f.$$

DEMONSTRAÇÃO: Faremos apenas a prova dos itens (c) e (d).

(c): Seja P uma partição qualquer do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

Então, como $f \geq 0$ em A, segue que $\forall B \in P$; $M_B \geq 0$. Disso,

$$\overline{\int_A} f \geq 0.$$

Como por hipótese f é integrável, segue que

$$\int_A f = \overline{\int_A} f \geq 0$$

Além disso, sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, com $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in A$.

Defina $h : A \to \mathbb{R}$ pondo

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Logo, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in A$. Assim, pela primeira parte feita acima, segue que

$$\int_A h \geq 0, \text{ ou seja,}$$

$$0 \leq \int_A (f-g) = \int_A f + (-g) = \int_A f + \int_A -1 g = \int_A f - \int_A g$$

por (a) por (b)

$$\Longrightarrow \quad \int_A f - \int_A g \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_A f \geq \int_A g$$

---

d) $$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| .$$

Basta observar que, por propriedade dos módulos, temos: $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Integrando sobre o bloco A, obtemos, c.f. o item anterior:

$$\underbrace{-\int_A |f|}_{-\alpha} \leq \underbrace{\int_A f}_{x} \leq \underbrace{\int_A |f|}_{\alpha \geq 0}$$

$\alpha > 0$

$-\alpha \leq x \leq \alpha$

$\Updownarrow$ cálculo I

$|x| \leq \alpha$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_A f \right| \leq \alpha = \int_A |f| .$$

□