14/11/23 — AULA 06

Na aula passada estudamos o importante Teorema Fundamental do Cálculo (TF.C)

TF.C: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é derivável com $f'$ integrável, então

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Notação: $f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b$

Ou seja, para calcular $\int_a^b g(x)\,dx$,

primeiro precisamos responder qual é a função $G$ tal que $G'(x) = g(x)$. Assim

$$\int_a^b g(x).dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b.$$

Vimos também que se $F(x)$ é uma antiderivada para $f(x)$ [ ou seja, se $F'(x) = f(x)$ ], então a antiderivada mais geral será

$$F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

E, o processo inverso da derivação é a antidiferenciação $\int$, e é tal que

$$d\left(\int F(x)\,dx\right) = F(x) + C$$

ANTIDERIVADA MAIS GERAL

No que segue, vamos desenvolver várias regras para obter as antiderivadas, ou, integrações indefinidas.

Sejam $u = u(x)$, $v = v(x)$ funções de $x$, e $c, k \in \mathbb{R}$. Então, valem as fórmulas:

01) $\int 1\,dv = v + C$

OU SEJA, QUAL É A FUNÇÃO CUJA DERIVADA, EM $v$, SEJA 1. RESPOSTA: $v + C$

De fato: $\frac{d}{dv}(v + c) = 1$ ; logo,

$$v + c = \int d(v + c) = \int 1\,dv$$

02) $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$.

De fato, basta notar que

$$\frac{d}{dx}\left(\int u\,dx + \int v\,dx\right) = \frac{d}{dx}\int u\,dx + \frac{d}{dx}\int v\,dx = u + v$$

Logo, $\int u\,dx + \int v\,dx = \int (u + v)\,dx$

03) $\int k\,v\,dv = k\cdot\int v\,dv$. De fato:

$$\frac{d}{dv}\left(k\cdot\int v\,dv\right) = k\cdot\frac{d}{dv}\left(\int v\,dv\right) = k\cdot v$$

04) $\int r^k \, dr = \dfrac{r^{k+1}}{k+1} + c \; ; \quad k \neq -1.$

De fato, basta observar que

$$\underbrace{\frac{d}{dr}\left(\frac{r^{k+1}}{k+1} + c\right)} = \frac{\cancel{k+1}\, r^{k+1-1}}{\cancel{k+1}} + 0$$

$$= \underbrace{r^k}.$$

Ex.: (a) $\int (x^3 - 2x)\,dx = ?$

Sol.: $\int (x^3 - 2x)\,dx = \int x^3\,dx + \int -2x\,dx = \int x^3\,dx - 2\int x\,dx$

PROPRIEDADE 02

PROPRIEDADE 03

$$= \frac{x^4}{4} + c_1 - \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} + c_2 = \frac{x^4}{4} - x^2 + c$$

PROPRIEDADE 04

$c_1 + c = c$
( de fato, podemos acrescentar uma constante, apenas)

(b) $\int (4x-3)^2\,dx.$

Sol.: Identificamos com $\int r^k \, dr$.

Neste caso, $r = 4x-3 \Rightarrow dr = 4\,dx$

$\Rightarrow dx = \dfrac{dr}{4}.$

Ou seja, precisamos, neste exemplo, efetuar uma troca de variável para podermos usar a fórmula da integral da potência. Assim:

$$\int (4x-3)^2 dx = \int v^2 \cdot \frac{dv}{4} = \frac{1}{4}\int v^2 dv$$

$$= \frac{1}{4}\frac{v^3}{3} + C = \frac{1}{12} v^3 + C$$

$$= \frac{1}{12}(4x-3)^3 + C$$

VOLTANDO À VARIÁVEL PRINCIPAL

05) $\int \frac{dv}{v} = \ln |v| + C$. De fato; temos 2 casos a considerar:

- $v > 0$; então

$$\frac{d}{dv}(\ln |v| + c) = \frac{d}{dv}(\ln v + c) = \frac{1}{v}$$

- $v < 0$; então

$$\frac{d}{dv}(\ln |v| + c) = \frac{d}{dv}(\ln(-v) + c) = \frac{-1}{-v} = \frac{1}{v}$$

Em qualquer dos casos tem-se que

$\frac{d}{dv}(\ln |v| + c) = \frac{1}{v}$; e então

$$\int \frac{1}{v}\, dv = \ln|v| + C.$$

EXEMPLO:

$$\int \frac{dx}{2-3x}.$$ Identificando com $\int \frac{dv}{v}$, temos

$$v = 2-3x \Rightarrow dv = -3\,dx$$
$$\Rightarrow dx = -\frac{1}{3}\,dv.$$

Assim:

$$\int \frac{dx}{2-3x} = \int \frac{-\frac{1}{3}\,dv}{v} = -\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v}$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|v| + C = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C.$$

---

06) $\int e^v\, dv = e^v + C.$

De fato, basta notar que

$$\frac{d}{dv}(e^v + C) = e^v.$$

Ex.: (a) $\int e^{\operatorname{sen} 2x} \cos 2x\, dx.$

Solução: Identificando com $\int e^v\, dv$, temos:

$$v = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow dv = \cos 2x \cdot 2\,dx$$
$$\Rightarrow \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\, dv.$$ Logo:

$$\int e^{\overbrace{\text{sen}2x}^{v}} \cdot \underbrace{\cos 2x\,dx}_{\frac{1}{2}dv} = \int e^{v} \cdot \left(\tfrac{1}{2}dv\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{v}\cdot dv = \frac{1}{2}\cdot e^{v} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{\text{sen}2x} + C$$

(b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$. Vamos identificar com $\int e^{v}\cdot dv$.

Neste caso, temos $v = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$\Rightarrow dv = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Logo, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot dv$, e disso:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int e^{v}\cdot(2dv) =$$

$$= 2\cdot\int e^{v}\cdot dv = 2\cdot e^{v} + C$$

$$= 2\cdot e^{\sqrt{x}} + C$$

---

07) $\int \text{sen}\,v\cdot dv = \underbrace{-\cos v + C}$

esta é a função cuja derivada é sen v.

De fato: $\frac{d}{dv}(-\cos v + C) = -(-\text{sen}\,v) = \text{sen}\,v$.

EXEMPLO: $\int sen(2x-x^2).(x-1)\,dx = ?$

SOLUÇÃO: Vamos identificar com $\int sen\,v.\,dv$.

Neste caso, chamando $v = 2x-x^2$, obtemos:

$$dv = (2-2x)\,dx$$

$$\Rightarrow dv = -2(x-1).dx \Rightarrow -\frac{1}{2}.dv = (x-1)dx,$$

e, portanto,

$$\int sen(\underbrace{2x-x^2}_{v}).\underbrace{(x-1)dx}_{-\frac{1}{2}dv} = \int sen\,v\cdot\left(-\frac{1}{2}dv\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int sen\,v.dv = -\frac{1}{2}.(-\cos v + C) = \frac{1}{2}\cos v + C$$

pois $-\frac{1}{2}.C = C$ (UMA CONST.)

08) $\int \cos v\,dv = sen\,v + C$;

De fato; $\frac{d}{dv}(sen\,v + c) = \cos v$.

---

09) $\int \tan v\,dv = ?$

Note que $\int \tan v\,dv = \int \frac{sen\,v\,dv}{\cos v}$.

Usando $\int \frac{du}{u}$; identificamos $u = \cos v$.

Logo, $du = -sen\,v\,dv$, e então

$\operatorname{sen} x\, dx = -du$. Assim:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x} = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

conclusão:

$$\boxed{\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c}$$

10) $\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$.

(se deduz análogo ao anterior)

11) $\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + c$

De fato, basta notar que

$$\frac{d}{dx}(\sec x + c) = \sec x \cdot \tan x$$

Ex.: $\int \sec(e^{2x}) \cdot \tan(e^{2x}) \cdot e^{2x} dx = ?$

solução: Escreva $x = e^{2x}$. Então,

$$dx = e^{2x} \cdot 2\, dx \Rightarrow e^{2x} dx = \frac{1}{2} dx.$$

Assim, temos:

$$\int \sec \underbrace{e^{2x}}_{x} \cdot \tan \underbrace{e^{2x}}_{x} \cdot \underbrace{e^{2x} dx}_{\frac{1}{2} dx} = \int \sec x \cdot \tan x \cdot \left(\tfrac{1}{2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \sec u \cdot \tan u \, du = \frac{1}{2} \sec u + C =$$

$$= \frac{1}{2} \sec(e^{2x}) + C$$

VOLTANDO À VARIÁVEL PRINCIPAL

12) $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C.$

De fato, basta notar que

$$\frac{d}{du}\left(\ln|\sec u + \tan u| + C\right) = \frac{d}{du}\left(\ln(\sec u + \tan u) + C\right) =$$

PARA SIMPLIFICAR, ASSUMA QUE $\sec u + \tan u > 0$

$$= \frac{\sec u \cdot \tan u + \sec^2 u}{\sec u + \tan u} = \frac{\sec u\,\cancel{(\tan u + \sec u)}}{\cancel{\sec u + \tan u}} = \sec u$$

Ex.: $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = ?$ Vamos identificar com a fórmula $\int \sec u \cdot du$. Neste caso, temos

$$u = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\,du = \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$ Assim:

$$\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \underbrace{\sec\sqrt{x}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2dv} = \int \sec v \cdot (2dv) =$$

$$= 2 \cdot \int \sec v \cdot dv = 2 \cdot \ln|\sec v + \tan v| + c$$

$$= 2 \cdot \ln|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}| + C$$

VOLTANDO PARA A VARIÁVEL PRINCIPAL.