09/11/23 - AULA 05

No final da aula passada vimos o seguinte resultado:

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $x_0 \in (a,b)$.
Então F é derivável em x_0 e

$$F'(x_0) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^x f(t)dt\right)\Bigg|_{x=x_0} = f(x_0),$$

sendo $x \in (a,b)$, então define-se a função

$F'(x)$ por

$$F'(x) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

que corresponde a um TEOR. FUNDAMENTAL DO CÁLCULO num "primeiro formato".

<u>Ex.s</u> 01) Dada $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt[3]{\csc^2 t + 4t}\,dt$

obter a derivada $F'(x)$.

<u>solução</u>:

$$F'(x) = \frac{d}{dt}\int_1^x \sqrt[3]{\csc^2 t + 4t}\,dt = f(x)$$

$$= \sqrt[3]{\csc^2 x + 4x}.$$

02) Idem para

$$F(x) = \int_1^{5x^3} \operatorname{sen} 2t \cdot dt$$

SOLUÇÃO: Escreva $u = 5x^3 \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 15x^2$

Então $F'(x) = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_1^u \operatorname{sen} 2t\, dt\right)}_{\operatorname{sen} 2u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{15x^2}$

ESTAMOS USANDO AQUI A REGRA DA CADEIA:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$\Rightarrow F'(x) = \operatorname{sen} 2\underbrace{u}_{5x^3} \cdot 15x^2$

$$\Rightarrow \boxed{F'(x) = \operatorname{sen} 10x^3 \cdot 15x^2}$$

TEOREMA: (TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – T.F.C)

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável.

Então,

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nas hipóteses do teorema.

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$, determinando subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Note que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = \cancel{f(t_1)} - f(t_0) + \cancel{f(t_2)} - \cancel{f(t_1)} + \dots \cancel{} + f(t_n) - \cancel{f(t_{n-1})}$$

$$= -\underbrace{f(t_0)}_{t_0 = a} + f(\underbrace{t_n}_{b}) = \underbrace{f(b) - f(a)}_{(**)}$$

Como f é derivável, segue que f é contínua. Em particular em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, temos f derivável em (t_{i-1}, t_i) e cont. no $[t_{i-1}, t_i]$. Estamos então, nas hipóteses do TEOR. DO VALOR MÉDIO (TVM) [veja aula passada].

Então, em (t_{i-1}, t_i), $\exists$ c_i tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})}, \quad (*)$$

e isto vale $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, sejam

$$m_i' = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f'(x) \quad \text{e} \quad M_i' = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f'(x)$$

"mín." "máx."

Então, segue que

$$m_i' \leq f'(c_i) \leq M_i' \quad , \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

multiplicando por $(t_i - t_{i-1}) > 0$, obtemos, $\forall i$:

$$m_i' \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq M_i' \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Somando sob todos os índices, obtemos:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i' (t_i - t_{i-1})}_{= s(f', P)} \leq \sum_{i=1}^{n} f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i' (t_i - t_{i-1})}_{S(f', P)};$$

ou seja,

$$s(f'; P) \leq \sum_{i=1}^{n} f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq S(f'; P),$$

$\forall P$ partição de $[a, b]$.

Como f' é integrável, então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ partição Q de $[a, b]$ tal que

$$S(f'; Q) - s(f'; Q) < \varepsilon$$

Então, sendo f' integrável, segue que

$$\exists \underbrace{\int_a^b f'(x)\,dx} = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \lim_{n\to\infty} s(f;P)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f'(c_i).(t_i - t_{i-1})$$

T. do sanduíche, do C1

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) =$$

por $(*)$

$$= \lim_{n\to\infty} f(b) - f(a) = \underbrace{f(b) - f(a)}$$

por $(**)$

$\square$

Ou seja, para calcular uma integral definida $\int_a^b g(x)\,dx$, temos de pensar em g como a derivada de uma função, digamos $g = f'$.

Então:

$$\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx} = \int_a^b f'(x)\,dx \underset{\text{T.F.C.}}{=} \underbrace{f(b) - f(a)}.$$

EXEMPLOS:

01) $\int_0^1 x^2 dx = ?$

Pensamos: qual seria a f tal que $f'(x) = x^2$? Seria, por exemplo

$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

Então, pelo T.F.C., temos:

$$\int_0^1 x^2 dx = f(1) - f(0) = \frac{(1^3)}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Obs: Na prática, escrevemos:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b$$

LISTA 02.

04 - (e). $\int_{-2}^{2} x.|x-1|dx$

CORRIGIDO

Solução: precisamos retirar a not. de módulo.

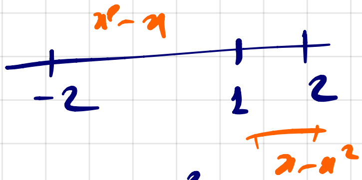
Note que:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x.|x-1| = \begin{cases} x(x-1), & \text{se } x \geq 1 \\ x(1-x), & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - x, & \text{se } x \geq 1 \\ x - x^2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Disso, temos:



$$\int_{-2}^{2} x|x-1|\,dx = \int_{-2}^{1} x|x-1|\,dx + \int_{1}^{2} x\cdot|x-1|\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (x-x^2)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2-x)\,dx$$

qual é a g tal que $g'(x) = x - x^2$?

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

qual é a f tal que $f'(x) = x^2 - x$?

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3} - \left(\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right) + \left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} - \left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{4}{2} - \cancel{\frac{8}{3}} + \cancel{\frac{8}{3}} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - 4 = \frac{3-2-12}{3} = -\frac{12}{3} = -4$$

Nos exemplos acima, observamos, por exemplo que dada $f'(x) = x^2$, tomamos $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Mas, poderia existir outra função mais geral tal que $f'(x) = x^2$? De fato vão haver infinitas, mas notaremos que a "parte principal" de todos será a mesma.

Para chegar a esta conclusão, precisamos de alguns lemas básicos:

LEMA 1: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$, então f é uma constante.

DEMONSTR.: Sejam x,y quaisquer em $[a,b]$, com $x<y$. Então, $f:[x,y]\to\mathbb{R}$ é derivável em (x,y) e contínua em $[x,y]$. Estamos, então, nas hipóteses do T.V.M. Ou seja, $\exists\, c$ entre x e y tal que

$$\underbrace{f'(c)}_{=0} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$$

$= 0$, por hipótese.

$$\Rightarrow f(y)-f(x)=0$$

$$\Rightarrow f(y)=f(x),$$

$$\forall x,y\in[a,b],$$

ou seja, f é constante.

□

LEMA 02: Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deriváveis, tais que $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Então, $\exists\, c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=g(x)+c$.

[OU SEJA, SE DUAS FUNÇÕES TIVEREM MESMA DERIVADA, ENTÃO ELAS DIFEREM ENTRE SI POR APENAS UMA CONSTANTE]

DEMONSTR.: Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deriváveis tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Defina $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Então $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

pois $f'(x) = g'(x)$ $\forall x$

$\Rightarrow h'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$;

e disso, pelo LEMA 01, segue que $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tal que

$h(x) = c$.

Ou seja, $c = h(x) = f(x) - g(x)$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = g(x) + c}$$

Def.: Dizemos que uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma ANTIDERIVADA para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

Isto posto, temos o seguinte resultado:

PROP.: Se $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma antiderivada para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então, a antiderivada mais geral de f será $\underbrace{F(x)}_{\text{PARTE PRINCIPAL}} + c$

DEMONSTR.: Sejam $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas antiderivadas para $f(x)$. Então,

$$F'(x) = f(x) \quad e \quad G'(x) = f(x)$$

Ou seja, $F'(x) = G'(x)$.

Pelo LEMA 02 segue que $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$G(x) = F(x) + c$$

$\square$

Def.: Chama-se ANTIDERIVAÇÃO o processo inverso à derivação, que também é chamada de ANTIDIFERENCIAÇÃO, PRIMITIVAÇÃO, ou INTEGRAÇÃO INDEFINIDA.

Simbolicamente, escrevemos: sendo $F(x) + c$ a antiderivada de $f(x)$ em $[a,b]$, então:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = f(x)$$

que em termos de diferenciais:

$$d\left(F(x)\right) = f(x)\,dx$$

Aplicando o processo inverso:

$$\underbrace{F(x) + c}_{\text{ANTIDERIVADA MAIS GERAL.}} = \int d\left(F(x)\right) = \int f(x)\,dx$$

Ou seja, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

chamada de INTEGRAL INDEFINIDA DE f.

Ou seja, é a pergunta: qual é a função cuja derivada é f?

Nas próximas aulas vamos desenvolver várias técnicas para o cálculo dessa integral indefinida.

Ex.: $\int \operatorname{sen} x \, dx = ?$

Ou seja, qual a $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Resposta: $F(x) = -\cos x + C$

Resp.: $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
