07/11/23 – AULA 04

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC):

PRELIMINARES:

Def.: Dizemos que uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é de LIPSCHITZ se, $\exists M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x-y| \quad , \forall x, y \in [a,b]$$

(um tal $M>0$ que cumpre a desigualdade acima chama-se uma constante de LIPSCHITZ para a f).

Assumindo que f seja derivável, então, sendo também de LIPSCHITZ, significa que a derivada de f fica "controlada" por $M>0$, ou seja, as inclinações das retas tangentes ao gráfico de f em (a,b), ficam entre $-M$ e M. De fato; sendo f de LIPSCHITZ, então se $\exists M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x-y| \quad ; \forall x, y \in [a,b],$$

temos que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq M \quad ; \text{ i.e.;}$$

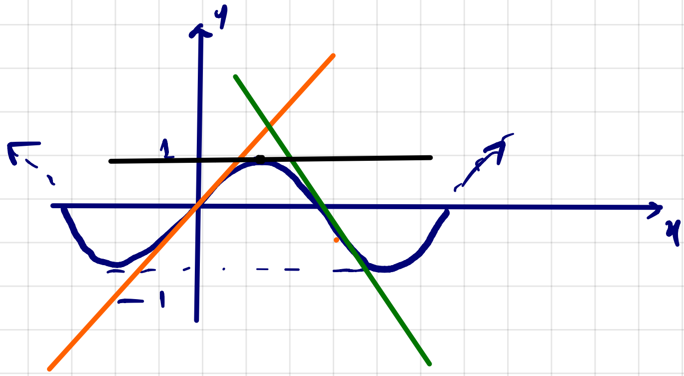
$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq M .$$

Fazendo $\lim\limits_{x \to y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq \lim\limits_{x \to y} M = M$

$$|f'(y)| \leq M \iff -M \leq f'(y) \leq M, \quad \forall y \in (a,b).$$

EXEMPLOS:

01) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen} x$



Esta função é de LIPSCHITZ. De fato, note que, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, temos:

$$|f(x)-f(y)| = |\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y| \overset{(*)}{=} \left|2\cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

$$= 2\cdot\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right|\cdot\underbrace{\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|}_{\le 1} \le \cancel{2}\cdot\left|\frac{x-y}{\cancel{2}}\right|\cdot 1 = 1\cdot|x-y|$$

(**) $|\operatorname{sen}\alpha|\le|\alpha|$

$\Rightarrow |\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y| \le 1\cdot|x-y|$, ou seja, $f(x)=\operatorname{sen}x$ é de LIPSCHITZ.

(*) $\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$

De fato: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a\cdot\cos b+\operatorname{sen}b\cdot\cos a$

$-\ \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a\cdot\cos b-\operatorname{sen}b\cdot\cos a$

$$\operatorname{sen}(\underbrace{a+b}_{p}) - \operatorname{sen}(\underbrace{a-b}_{q}) = 2\cdot\operatorname{sen}b\cdot\cos a$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}}$$

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$$

$+$

$2a = p+q$

$a=\frac{p+q}{2}$

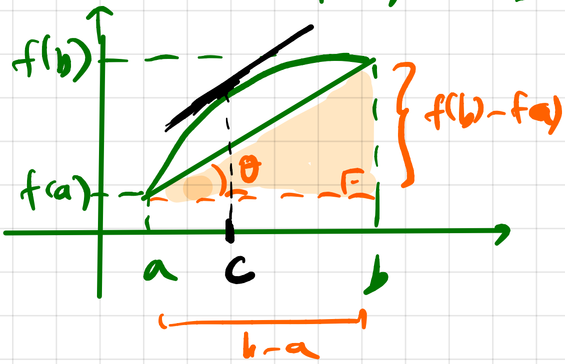
$b=\frac{p-q}{2}$

(**) T.V.M. (TEOREMA DO VALOR MÉDIO):

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. em $[a,b]$ e derivável em (a,b)

então, $\exists\, c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$\tan\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Desta forma, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é cont. em $\mathbb{R}$ e derivável.

tome $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $[x, y]$, então, pelo T.V.M,

$\exists\, c$ entre x e y tal que

$$\cos c = f'(c) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y}$$

Em particular em $[0, x]$, teremos,

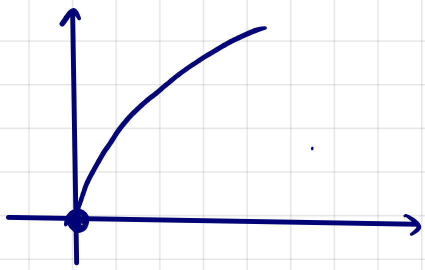
$$\cos c = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0}$$

$$\Rightarrow \cos c = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\Rightarrow |\cos c| = \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$$

$$\Rightarrow |\operatorname{sen} x| = \underbrace{|\cos c|}_{\leq 1} \cdot |x| \leq |x|$$

02) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.



Afirmamos que f não é de LIPSCHITZ. De fato, notamos geometricamente, que, perto de $x=0$ as inclinações das retas tangentes ao gráfico de f não tendendo a uma reta vertical. Vamos examinar no intervalo $[0,\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$

De fato, suponha, por absurdo, que f seja de LIPSCHITZ. Então, $\exists$ $K>0$ tal que

$$|f(\tfrac{1}{n})-f(0)|\leq K.\left|\tfrac{1}{n}-0\right|$$

$$\left|\sqrt{\tfrac{1}{n}}-\underbrace{\sqrt{0}}_{=0}\right|\leq K.\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\leq K.\frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right)^2\leq(K)^2 \Rightarrow \frac{n^2}{\cancel{n}}\leq K^2.$$

$$n\leq K^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

ou seja, o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais ficaria limitado superiormente por K^2, o que é um absurdo!

Portanto, f não é de LIPSCHITZ.

PROP.: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ for de LIPSCHITZ, então f é contínua.

DEMONSTR.: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ de LIPSCHITZ.

Então, $\exists M > 0$ tal que, $\forall x, y \in [a,b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|.$$

Queremos mostrar que f é cont.

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in [a,b]$, tais que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Como f é de LIPSCHITZ, com constante $M > 0$

Tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$. , e disso, sendo $|x - y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$

teremos

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y| < \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} = \varepsilon,$$

pois f é de LIPSCHITZ

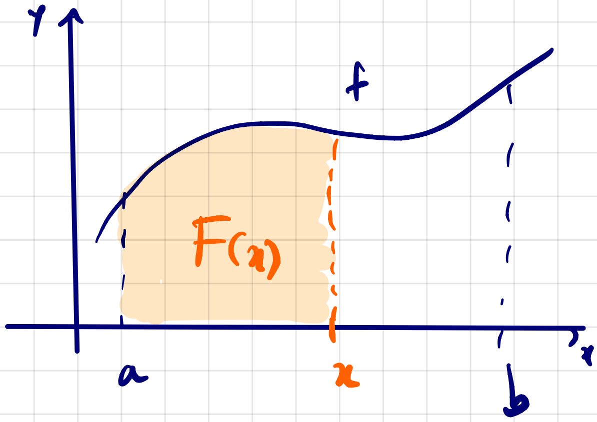
ou seja, f é contínua. $\square$

Def: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

Defina $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Note que se $f \geq 0$, então $F(x)$ fornece a área abaixo do gráfico de f no intervalo de $[a, x]$.



PROPOSIÇÃO: F acima definida é de LIPSCHITZ e, portanto, contínua.

DEMONSTR.: Seja $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Como f é integrável, segue que f é limitada.

Assim, $\exists\, M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in[a,b]$.

$\forall x,y\in[a,b]$, temos:

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_y^a f(t)\,dt\right| =$$

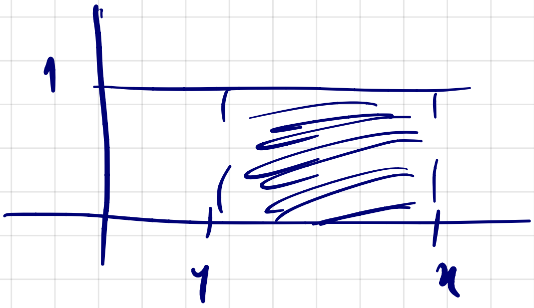
propriedade (i-v) da aula passada.

$$= \left|\int_y^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \leq \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt \leq \int_y^x M\,dt =$$

propriedade (viii) da aula passada

$$= M \cdot \int_y^x 1 \cdot dt = M \cdot |x - y|$$



$$(x-y)\cdot 1$$

Ou seja, mostramos que

$$|F(x) - F(y)| \leq M \cdot |x-y| \;,\; \text{i.e.,}$$

F é de LIPSCHITZ. Pela proposição anterior segue que F é contínua.

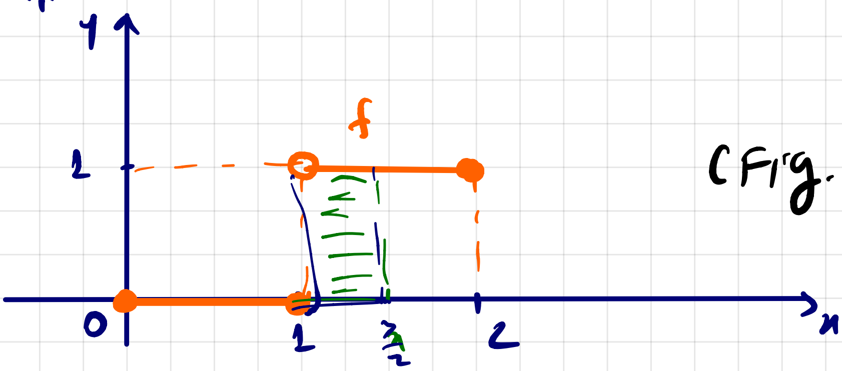
$\square$

<u>Ex.:</u> $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Obter F.

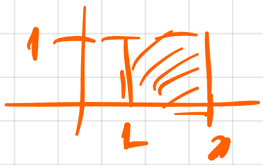
<u>solução:</u> Note que f não é cont. em $x = 1$:



(Fig. 1)

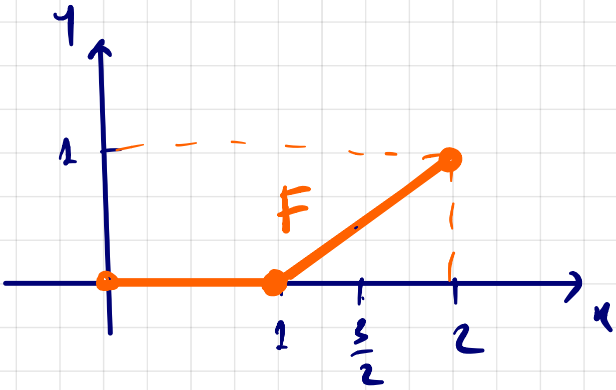
$$F(x) = \begin{cases} \overbrace{\int_0^x 0\,dt}^{=0}, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \underbrace{\int_0^1 0\,dt}_{=0} + \int_1^x 1 \cdot dt, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\int_1^x 1\,dt = (x-1)\cdot 1$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 + (x-1), & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x-1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



(Fig 2)

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

↳ representa a área do gráfico de f no intervalo $[0, \frac{3}{2}]$ (veja no gráfico de f) (Fig 1)

PROPOSIÇÃO: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $x_0\in(a,b)$. Então F é derivável em x_0 e

$$F'(x_0) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\Bigg|_{x=x_0} = f(x_0)$$

DEMONSTR.: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. Então, dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que, $\forall x,y\in[a,b]$: tais que

$$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Tome $h\in\mathbb{R}$ tal que $x_0+h\in[a,b]$.

Vamos considerar

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right|$$

Vamos mostrar que esta diferença tende a zero quando $h\to 0$.

Note que:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\cdot\Big[\underbrace{F(x_0+h)}_{\int_a^{x_0+h} f} - \underbrace{F(x_0)}_{\int_a^{x_0} f}\Big] - f(x_0)\right| =$$

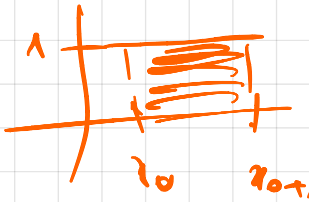
$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right] - f(x_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \right] - f(x_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \right| =$$

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

$$= \frac{1}{h} \cdot f(x_0) \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} 1 \, dt$$



$$(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}) \cdot 1 = h$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt \right|$$

$$\le \frac{1}{|h|} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\varepsilon} \cdot dt <$$

Como f é cont., por hipótese, para $\varepsilon>0$ dado, $\exists\ \delta>0$ tal que, $|t-x_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$

$$< \frac{1}{|h|}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \cdot dt = \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot\underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dt}_{h} = \frac{\cancel{h}}{|\cancel{h}|}\cdot\varepsilon \to 0$$

$\square$