AULA REMOTA I - AULA 08 -

Iniciamos estudos sobre trigonometria.
Vimos várias fórmulas, tais como as fórmulas de adição e subtração de arcos. Por exemplo:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \;;$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

Vamos estudar agora as fórmulas do arco duplo e do arco metade.

FÓRMULAS DO ARCO DUPLO.

Basta considerar $2a = a + a$ e usar as fórmulas já provadas para adição de arcos.

- $\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos a$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a}$$

• $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a$

$= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

$\Rightarrow \boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$

Obs.: Não confunda com a rel. trigonom. fundamental:
$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

• $\tan 2a = \tan(a+a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a}$

$= \dfrac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\Rightarrow \boxed{\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}}$

FÓRMULAS DO ARCO METADE!

já temos que $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

Como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$

$$\cos 2a = (1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^2 a$$

$$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a$$

$$\Rightarrow \quad 2 \operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos 2a$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

Escrevendo $2a = x$, teremos:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

ou ainda:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

ANALISAR SINAL NO QUADRANTE

Do mesmo modo se mostra que

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \; ; \text{ e}$$

que

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Ex-1 Determine o valor de $\cos 37{,}5^\circ$.

Solução: Note que $37{,}5^\circ = \frac{75^\circ}{2}$.

Assim, escreva $x = 75^\circ$.

Vamos, então determinar $\cos\frac{x}{2}$.

Então,

$$\cos\frac{x}{2} = \cos 37{,}5^\circ = +\sqrt{\frac{1+\cos 75^\circ}{2}} \; ;$$

1º Q

Como $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) =$

$$= \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Assim, obtemos:

$$\cos 37{,}5° = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}{2}} = \cdots = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}.$$

02) Se $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, calcule $\cos 2x$. $(2x \in 1^{\underline{o}} q)$

Solução: Elevando a igualdade ao quadrado, obtemos:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \underbrace{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}_{\operatorname{sen} 2x} + \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

$$1 + \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{3} - 1$$

$$\operatorname{sen} 2x = -\frac{2}{3}$$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 . \forall \alpha.$

$$\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 2x = 1$$

$$\cos^2 2x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

QUAL O QUADRANTE?

$$\cos 2x = +\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$2x \in 1^{\underline{o}} q.$