CÁLCULO 1.

14/11/23 – AULA 06

LISTA 01.

13) A MEIA VIDA DE CERTA SUBSTÂNCIA RADIOATIVA É DE 12h. INICIALMENTE HÁ 8g DA SUBSTÂNCIA RADIOATIVA.

(a) EXPRESSE A QUANTIDADE REMANESCENTE DA SUBSTÂNCIA EM FUNÇÃO DO TEMPO t.

(b) $t = ?$ PARA QUE $m(t) = 1g$?

(c) [EXTRA] QUANTO TEMPO LEVARÁ PARA RESTAR 5g DA SUBSTÂNCIA ?

SOLUÇÃO:

(a) $m_0 = 8g$

$t = 0 \longrightarrow m = m_0$

$t = 12h \longrightarrow m = m_0 - \frac{1}{2} m_0 = m_0\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$t = 2.12h \longrightarrow m = m_0\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} m_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$= m_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\right]$

$\vdots \qquad = m_0\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2$

$t = k12 \longrightarrow m(t) = m_0\left(1 - \frac{1}{2}\right)^k$

$k = \frac{t}{12}$

Então, $m(t) = \underbrace{m_0}_{8}\left(\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{1/2}\right)^{\frac{t}{12}} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$

Portanto, temos $m: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$ (FUNÇÃO EXP.)

(b) $m(t) = 1g$; $t = ?$

$$1 = m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{12} = 3 \Leftrightarrow \boxed{t = 36\,h}$$

(c) $m(t) = 5g$; $t = ?$

$$5 = m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

(AGORA NÃO É POSSÍVEL OBTER IGUALDADE DE MESMA BASE COMO NO ITEM (b), VAMOS TER QUE RECORRER A LOGARITMOS.)

PROPRIEDADE: $\log_b a = \log_b c \Longleftrightarrow a = c.$

DEMONSTR.:

De fato, basta observar que

$$\log_b a = \log_b c \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b^{\log_b c} = a \Leftrightarrow c = a$$

$\square$

Assim, voltando ao problema:

$$\frac{5}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}} \iff \log \frac{5}{8} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

NOTAÇÃO: $\log y = \log_{10} y$

$$\iff \log 5 - \log 8 = \frac{t}{12}\left(\underbrace{\log 1}_{=0} - \log 2\right)$$

$$\iff t = \frac{12.(\log 5 - \log 8)}{-\log 2}$$

$$\iff t \cong \frac{12.(0{,}698970004 - 0{,}903089987)}{0{,}301029996}$$

$$\iff t \cong 8{,}137 \text{ h}$$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

Def.: Chama-se função logarítmica a função $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Transformando para a notação exponencial, obtemos:

$$y = \log_a x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x = a^y > 0.$$

Logo, $x > 0$, i.e., a reta $x = 0$ (eixo y) será a ASSÍNTOTA VERTICAL do gráfico de f.

Conforme estudo da função exponencial, temos que $y = \log_a x$ será crescente, se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, isto porque

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow \underbrace{a^y = x}_{\text{NOTAÇÃO EXPONENCIAL}}.$$

ESBOÇO GRÁFICO: Vejamos alguns exemplos:

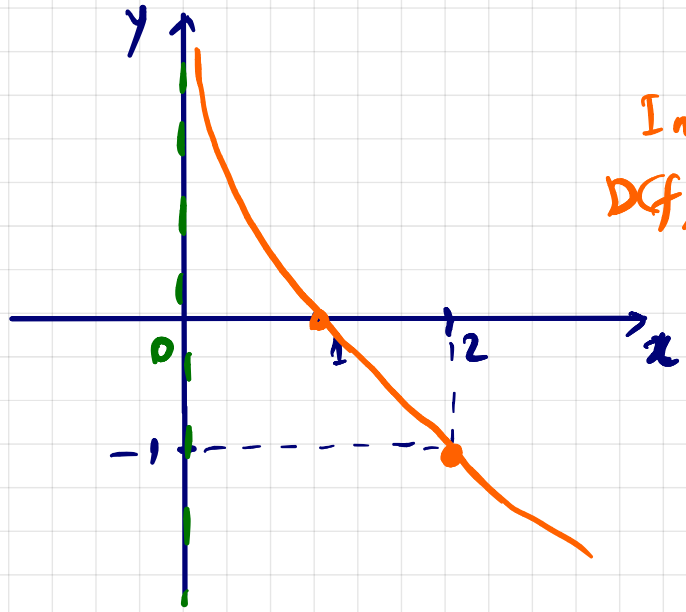
01) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

SOLUÇÃO: $\log_{\frac{1}{2}} x = y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^y}_{>0} = x$ → $x > 0$, logo, $x = 0$ é ASSÍNTOTA VERTICAL.

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$	y
$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	0
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	-1

→ ATRIBUÍMOS VALORES PARA y.

esboço gráfico de f:



$Im(f) = \mathbb{R}.$

$D(f) = (0, +\infty)$

02) $y = 1 + 2\log_2(1-x)$

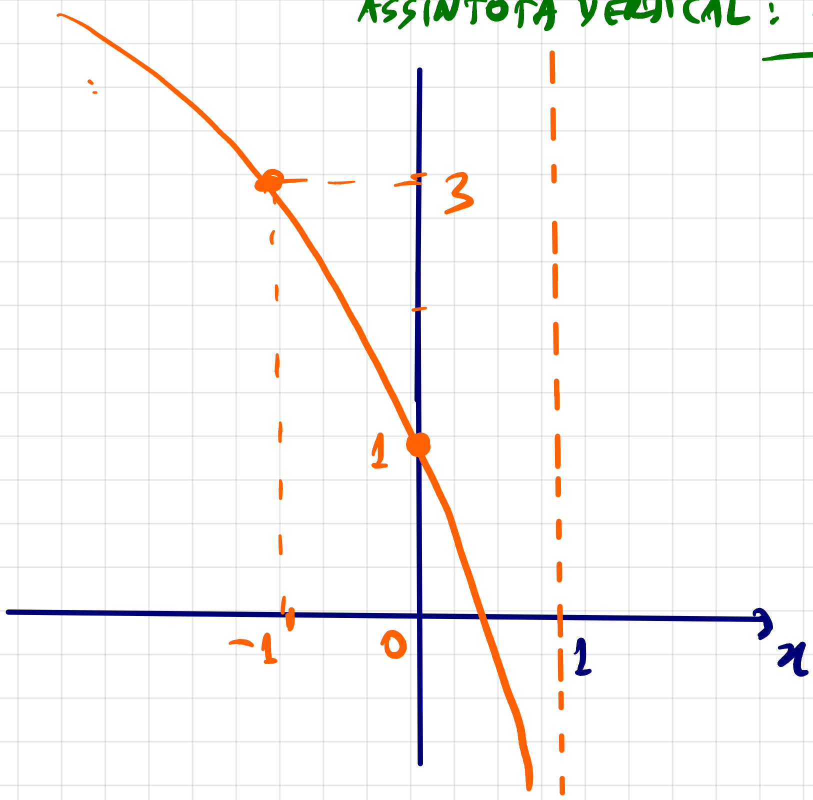
<u>SOLUÇÃO:</u> $y - 1 = 2 \cdot \log_2(1-x) \iff \dfrac{y-1}{2} = \log_2(1-x)$

$\iff \underbrace{1 - x}_{\Downarrow} = 2^{\frac{y-1}{2}} > 0 \iff x = 1 - 2^{\frac{y-1}{2}}$

$1 - x > 0 \iff x < 1.$ $\qquad D(f) = (-\infty, 1)$

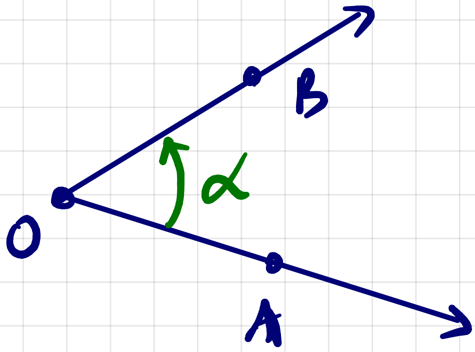
ASSÍNTOTA VERTICAL: $x = 1.$

$x = 1 - 2^{\frac{y-1}{2}}$	y
$1 - 2^0 = 0$	1
$1 - 2^1 = -1$	3



NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA:

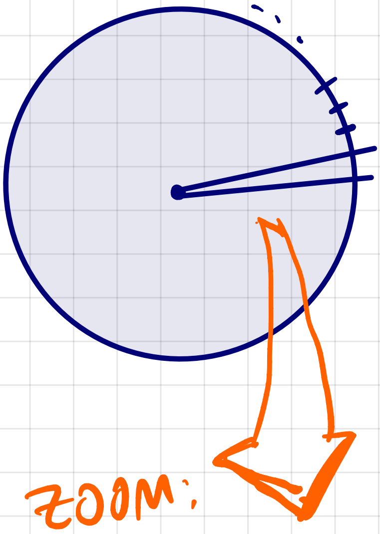
Def.: Chama-se ângulo a reunião de duas semi-retas de mesma origem:



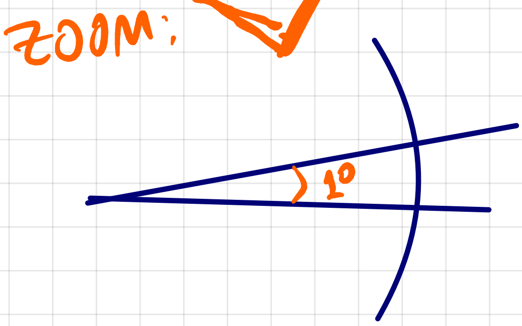
— ÂNGULO α.

$\alpha = A\hat{O}B$.

Def.: Chama-se grau a fração $\frac{1}{360}$ da circunferência.



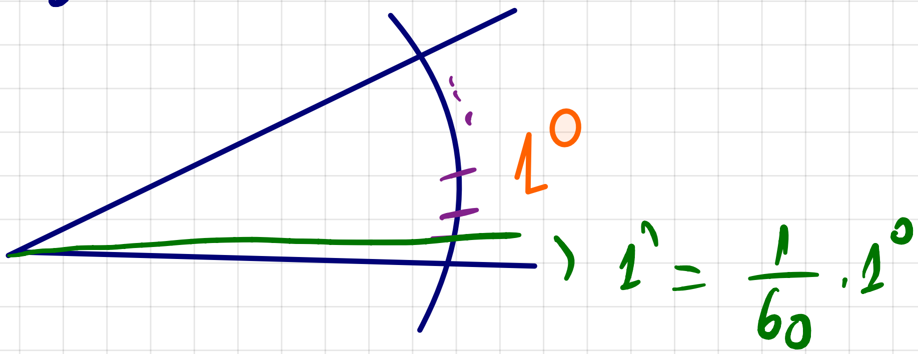
DIVIDIMOS A CIRCUNF. EM 360 PARTES IGUAIS. O ÂNGULO DE 1 GRAU (1°) CORRESPONDE A CADA UMA DESSAS "FATIAS"



Def.: Chama-se minuto a fração $\frac{1}{60}$ do grau. NOTAÇÃO:

$$1' = \frac{1}{60} \cdot 1^\circ$$

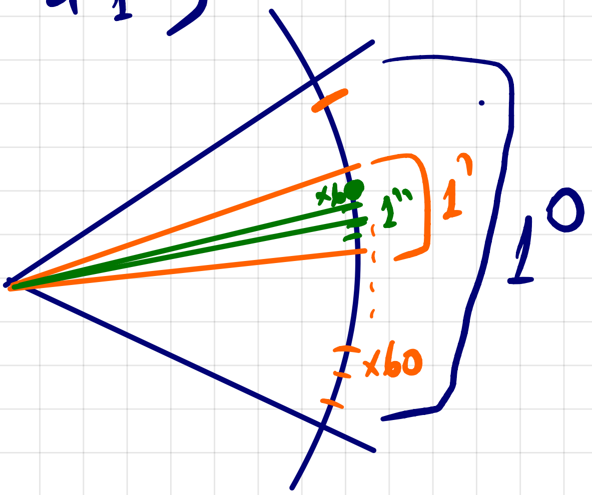
(ou seja, cada grau é dividido em 60 partes iguais, e cada fração será 1'.)



Def.: Chama-se SEGUNDO a fração $\frac{1}{60}$ do minuto.

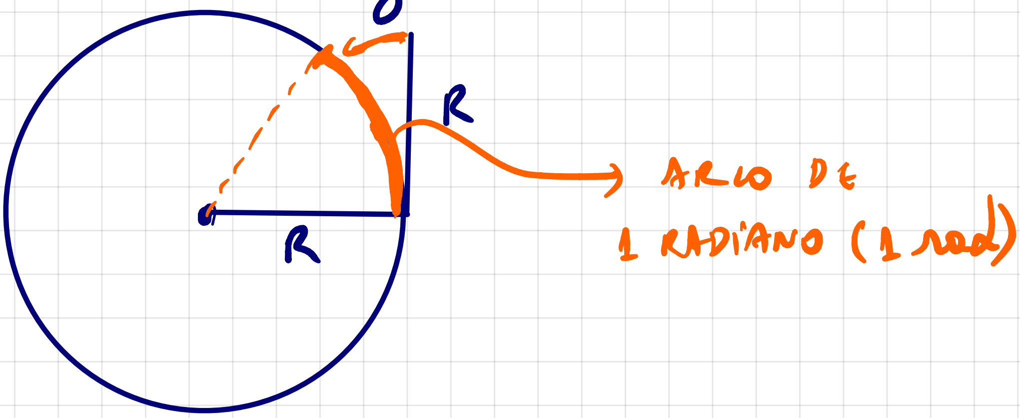
Simbolicamente: $1'' = \frac{1}{60} \cdot 1'$.

(i.e., dividimos 1' em 60 partes iguais. Cada uma corresponde a 1'')



ESQUEMA "EXAGERADO" DO GRAU E SEUS SUBMÚLTIPLOS.

Def.: Chama-se RADIANO o arco determinado numa circunferência de raio R cujo comprimento do arco é numericamente igual à medida do raio R.



Quantos radianos tem em uma circunferência?

Por regra de três:

$$1\ \text{rad} \quad \text{———} \quad R$$
$$x \quad \text{———} \quad 2\pi R$$

→ medida do comprimento da circunf.

$$x \cdot R = 2\pi R \cdot 1\ \text{rad}.$$

$$x = \frac{2\pi \cancel{R}}{\cancel{R}}\ \text{rad} \Rightarrow \boxed{x = 2\pi\ \text{rad}.}$$

em uma circunf. há 2π rad.

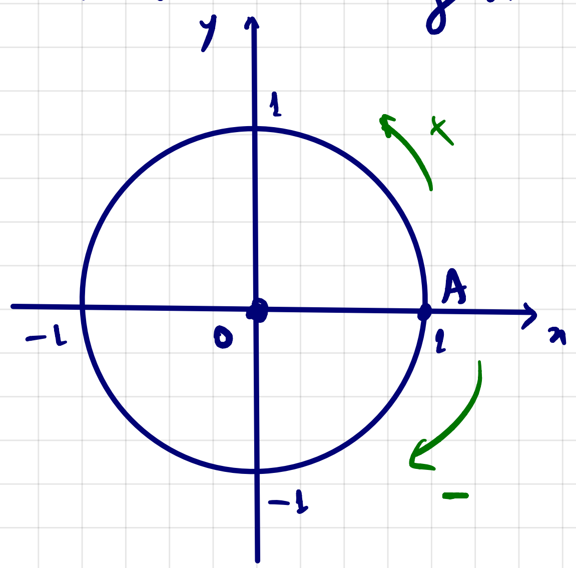
Relação entre graus e radianos:

$$360° \quad \text{———} \quad 2\pi\ \text{rad}.$$
$$180° \quad \text{———} \quad \pi\ \text{rad}.$$
$$90° \quad \text{———} \quad \frac{\pi}{2}\ \text{rad}.$$

correspondências.

Ciclo trigonométrico:

Def.: Chama-se ciclo trigonométrico a circunferência unitária centrada na origem do sistema cartesiano.

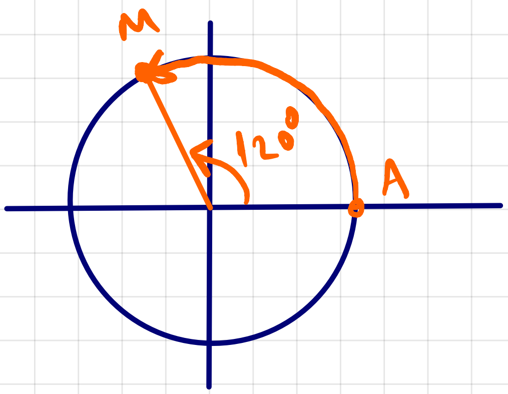


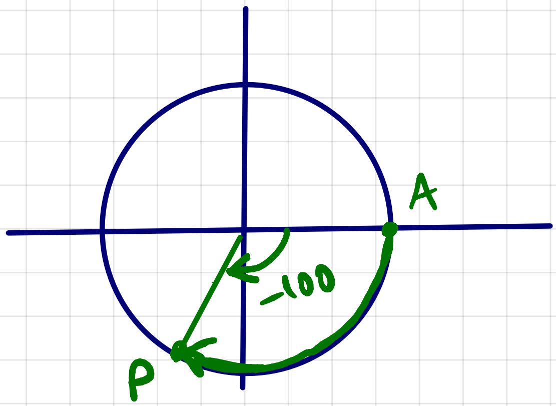
O: origem dos eixos

A: origem dos arcos

A marcação de arcos no ciclo trigonométrico é feita no sentido anti-horário (para arcos positivos), e no sentido horário (para arcos negativos).

Ex.: $\overset{\frown}{AM} = 120°$. ; $\overset{\frown}{AP} = -100°$.





No ciclo podemos marcar arcos com mais de 360°.
Por exemplo: $\overset{\frown}{AT} = 2170°$:

$$\begin{array}{r|l} 2170° & 360 \\ \hline -2160° & 6 \text{ VOLTAS} \\ \hline 10° & \end{array}$$

Ou seja, o arco $\overset{\frown}{AT} = 2170°$ dá 6 voltas no sentido anti-horário e para em 10°.

Então, os arcos de 2170° e 10° diferem só no número de voltas, ambos têm extremidade em 10°.

Isto motiva definir:

<u>Def</u>: Dizemos que dois arcos são <u>CÔNGRUOS</u> se possuírem mesmas origem e extremidade; diferenciando apenas no número de voltas.

Def.: Chama-se EXPRESSÃO GERAL a expressão de arcos côngruos da forma

$$\overset{\frown}{AM}_k = k \cdot 360^\circ + \alpha \;, \qquad 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ,$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$. O arco α chama-se MENOR DETERMINAÇÃO dos arcos $\overset{\frown}{AM}_k$.

Ex.: $\overset{\frown}{AM}_k = k \cdot 360^\circ + 40^\circ$:

$k = -1$: $\overset{\frown}{AM}_{-1} = -1 \cdot 360^\circ + 40^\circ = 320^\circ$

$k = 0$: $\overset{\frown}{AM}_0 = 0 \cdot 360^\circ + 40^\circ = \underline{40^\circ}$] MENOR DETERM.

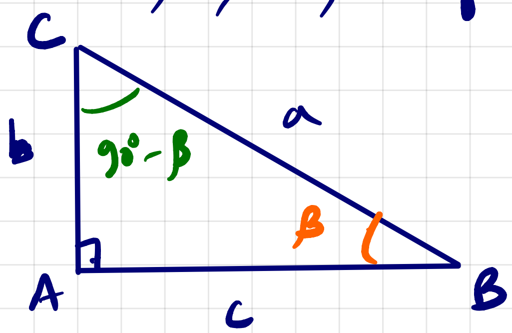
$k = 1$: $\overset{\frown}{AM}_1 = 1 \cdot 360^\circ + 40^\circ = 400^\circ$

$k = 2$: $\overset{\frown}{AM}_2 = 2 \cdot 360^\circ + 40^\circ = 760^\circ$

⋮

NÚMEROS TRIGONOMÉTRICOS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO:

Def.: Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A e com lados a, b, c, conforme o esquema:



Seja β o ângulo interno ao vértice B

Definimos os seguintes números trigonométricos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{c}{a} \quad ; \quad \tan\beta = \frac{b}{c}$$

Além disso, para o ângulo $90° - \beta$, teremos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(90° - \beta) &= \frac{c}{a} = \cos\beta \\ \cos(90° - \beta) &= \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta \\ \tan(90° - \beta) &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\tan\beta} := \cot\beta \end{aligned}\right\}$$

Relações de arcos complementares.

Pelo T. de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (\div\ a^2 > 0:)$$

$$\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$1 = (\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2 .$$

NOTAÇÃO:

$$(\operatorname{sen}\beta)^2 = \operatorname{sen}^2\beta$$

$$(\cos\beta)^2 = \cos^2\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1}$$

RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA FUNDAMENTAL.