CÁLCULO I — 09/11/23 — AULA 05

Voltando ao estudo da função modular iniciada no final da aula passada:

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$

Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, então:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 5\cdot(-x) + 6, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 6, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

OU SEJA, TEMOS DUAS PARÁBOLAS PARA TRAÇAR, UMA ONDE $x \geq 0$ E A OUTRA ONDE $x < 0$.

1º: $y = x^2 - 5x + 6$ $(x \geq 0)$

zeros: $x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

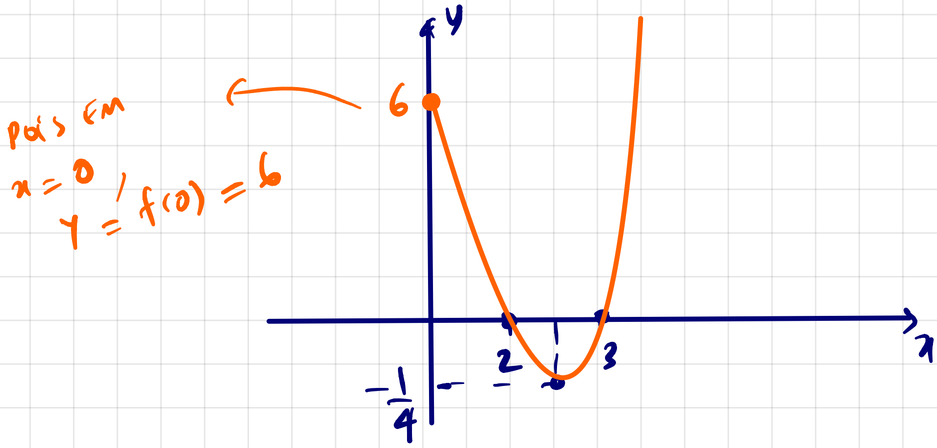
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{5+1}{2} = 3, & \text{ou} \\ x = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Obs: LIVRO: UM CURSO DE CÁLCULO. MAURÍCIO ZAHN E LISIANE MENESES. Ed. Ciência Moderna. 2013.

VÉRTICE: $V(x_v, y_v)$; onde:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} \\ y_v &= f(x_v) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\left(\frac{5}{2}\right) + 6 \\ &= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \\ &= \frac{25 - 50 + 24}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Assim, para $x \geq 0$, temos:



2º: $y = x^2 + 5x + 6 \quad (x < 0)$

zeros: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5+1}{2} = -2, \text{ ou} \\ x = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$$

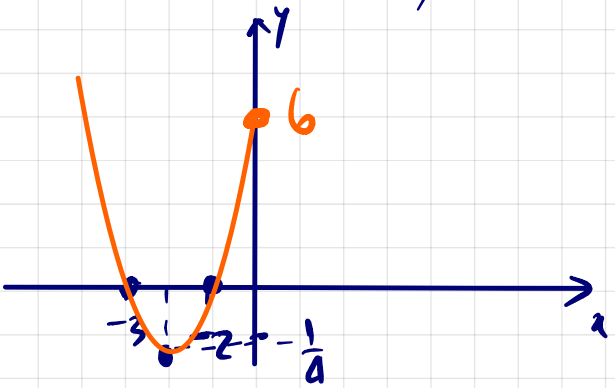
VÉRTICE: $V(x_v, y_v)$, onde:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$$

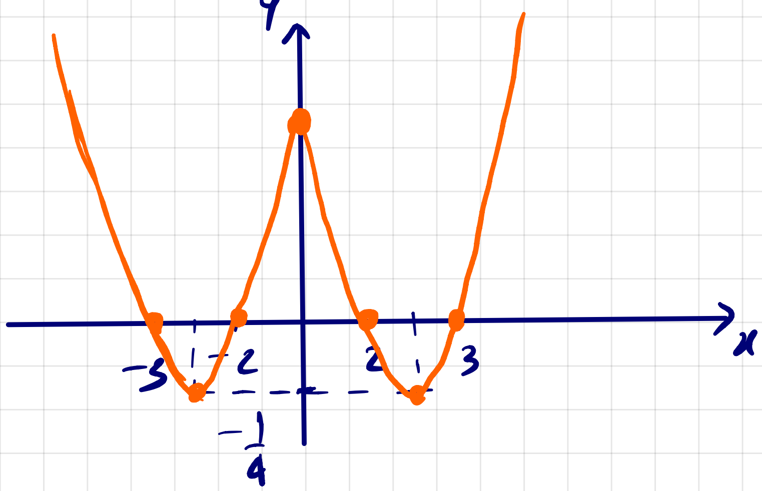
$$y_V = f(x_V) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

esboço para $y = x^2 + 5x + 6$, $x < 0$:



Por fim, obtemos o esboço gráfico final para f:



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Def: Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Definimos a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = a^x$.

Por quê devemos impor $a > 0$ e $a \neq 1$?

- se $a = 1$, teríamos $f(x) = 1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; ou seja, trata-se de uma função constante.

- se $a=0$, teríamos

$$f(x) = 0^x = \begin{cases} 0, & \text{se } x>0 \\ \text{indeterminado}, & \text{se } x=0 \\ \nexists, & \text{se } x<0 \text{ (POIS TERÍAMOS UMA DIVISÃO POR ZERO)} \end{cases}$$

- se $a<0$, teríamos infinitos valores não definidos. Por exemplo, tomando $a=-2<0$, então,

$$f(x) = (-2)^x,$$

e, em particular, para $x=\frac{5}{2}$; (por exemplo):

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = (-2)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{(-2)^5} = \sqrt{-32} \notin \mathbb{R}.$$

Por isso consideramos a exponencial

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, com $a>0$ e $a \neq 1$.

PROP.: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ é crescente se $a>1$ e decrescente se $0<a<1$.

DEMONSTR.:

- se $a>1$: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x<y$.

Então

$$x<y \Rightarrow a^x < a^y \Rightarrow f(x) < f(y),\ \text{i.e.,}$$

f é crescente.

- se $0<a<1$. Então, $\frac{1}{a}>1$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x<y$. Pelo caso acima para $\frac{1}{a}>1$, temos:

$$x<y \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y \Rightarrow \frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^x > a^y \Rightarrow f(x) > f(y),$$ ou seja, f é decrescente.

tomando os inversos

□

Obs.: Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, temos que $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato, • se $x>0$, temos $a^x > 0$.

• se $x = 0$, temos $a^x = a^0 = 1 > 0$

• se $x < 0$, temos $-x > 0$, e daí

$$a^x = \frac{1}{\underbrace{a^{-x}}_{>0}} > 0$$

GRÁFICO:

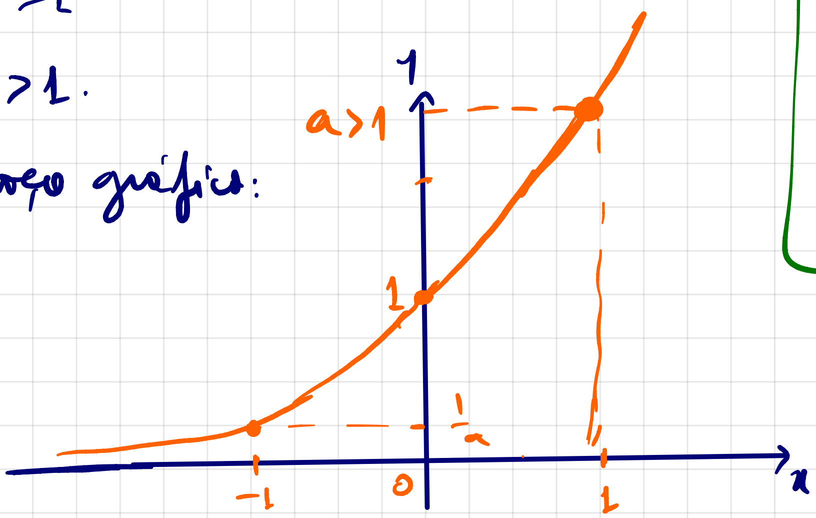
1.º CASO: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 1$ (exponencial crescente)

Temos $y = a^x > 0$. (e então, a reta $y = 0$ será uma ASSÍNTOTA HORIZONTAL)

onde o gráfico da f não chega a atingir, mas se aproxima arbitrariamente

x	$y = a^x$
-1	$a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$
0	$a^0 = 1$
1	$a > 1$.

esboço gráfico:



2º caso $0 < a < 1$.

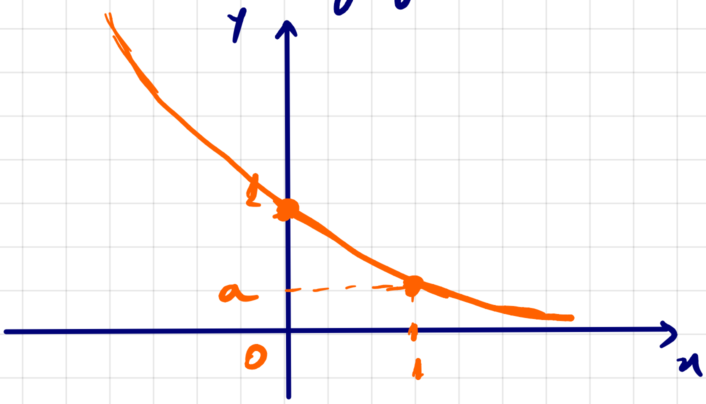
$f(x) = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

DECRESCENTE

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$a^1 = a$, $0 < a < 1$.

$y = a^x > 0 \Rightarrow y = 0$ é a ASSÍNTOTA HORIZONTAL.

esboço gráfico:



EXEMPLOS:

01) $f(x) = 2^x$.

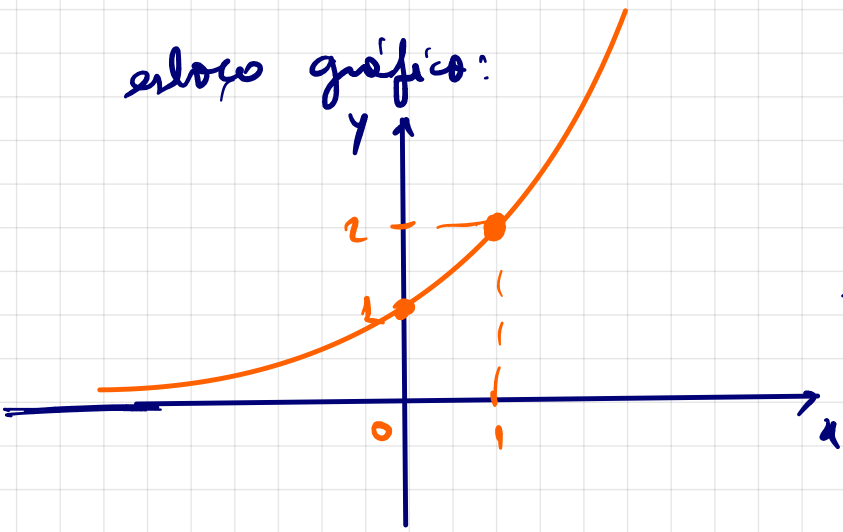
x	y
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL:

$y = 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = 0$ (ASSÍNTOTA HORIZ).

esboço gráfico:



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (0, +\infty)$

pois $y > 0$

02) $f(x) = 1 - 2^{1-2x}$

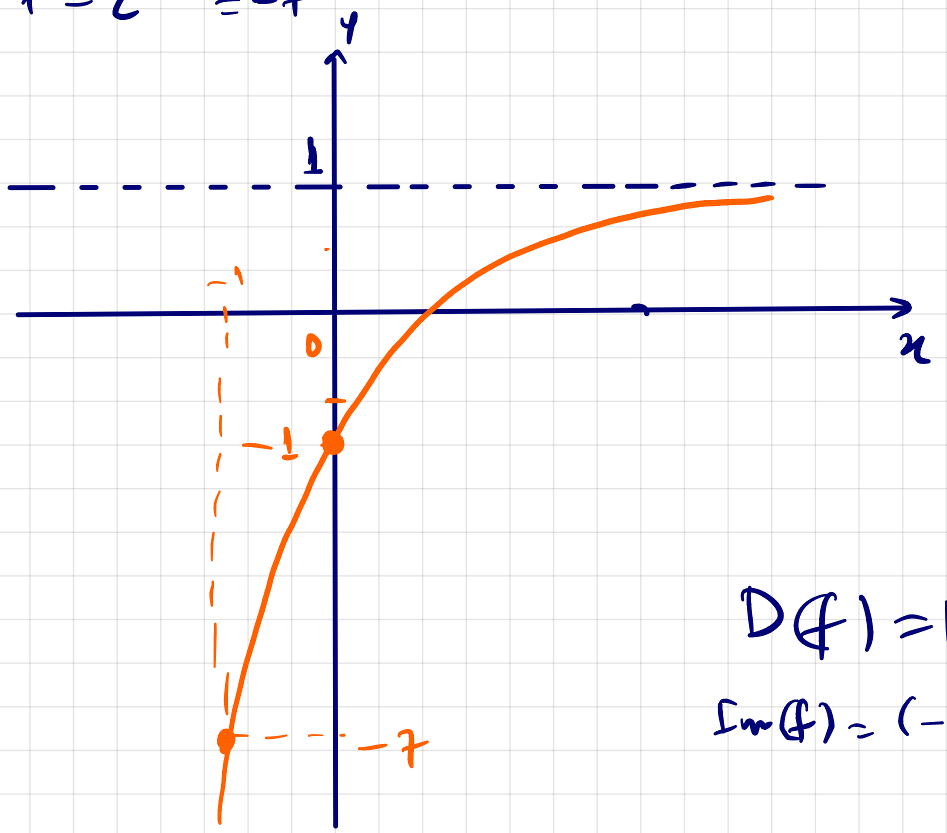
ASSÍNTOTA: $y = 1 - 2^{1-2x} \iff y - 1 = -2^{1-2x}$

$\iff 1 - y = 2^{1-2x} > 0.$

$\iff 1 - y > 0 \iff \boxed{y < 1}$

LOGO, A ASSÍNTOTA HORIZONTAL SERÁ: $y = 1$.

x	$y = 1 - 2^{1-2x}$
0	$1 - 2^1 = -1$
-1	$1 - 2^{1+2} = -7$



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (-\infty, 1).$

(pois $y < 1$)

LOGARITMOS:

Def.: Sejam $a>0$ e $b>0$, $b\neq 1$. Chama-se logaritmo de a na base b o expoente $c\in\mathbb{R}$ ao qual se deve elevar a base b de modo a obter a.

Simplificadamente:

$$\log_b a = c \overset{\text{Def.}}{\iff} b^c = a$$

Ex.: $\log_2 8 = x \iff 2^x = \underbrace{8}_{2^3} \iff 2^x = 2^3 \iff \boxed{x=3}$

ou seja, 3 é o expoente ao qual se deve elevar a base 2 de modo a obter 8.

Obs.: $\log_b a = c \overset{\text{def.}}{\iff} b^c = a$,

(NOTAÇÃO EXPONENCIAL)

↳ nessa notação entendemos por que impor $a>0$ e $b>0$, $b\neq 1$.

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades:

(a) $\log_a 1 = 0$

(b) $\log_a a = 1$.

(c) $\log_b a^m = m \cdot \log_b a$.

(d) $\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$

(e) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$.

DEMONSTR.:

(a) $\log_a 1 = x \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^x = 1 = a^0 \Longleftrightarrow x = 0$

Logo, $\log_a 1 = 0$

(b) $\log_a a = x \Longleftrightarrow a^x = a^1 \Longleftrightarrow \boxed{x = 1}$

Logo, $\log_a a = 1$.

(c) Escreva $\log_b a^m = x$ e $m \cdot \log_b a = y$.

Vamos mostrar que $x = y$.

De fato:

- $\log_b a^m = x \overset{def.}{\Longleftrightarrow} b^x = a^m$ (I)

- $m \cdot \log_b a = y \Leftrightarrow \log_b a = \frac{y}{m} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} b^{\frac{y}{m}} = a$ (II)

De (I) e (II), vem:

$$b^x = a^m = \left(b^{\frac{y}{\cancel{m}}}\right)^{\cancel{m}} = b^y$$

$$\Rightarrow b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$$

Portanto, $\log_b a^m = m \cdot \log_b a$.

(d) $\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$:

Escreva

$$\log_c (a \cdot b) = x;$$

$$\log_c a = y$$

$$\log_c b = z$$

Vamos mostrar que $x = y + z$. De fato:

- $\log_c ab = x \Leftrightarrow c^x = a \cdot b$ (*)

- $\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a$ (**)

- $\log_c b = z \Leftrightarrow c^z = b$ (***)

Levando (**) e (***) para (*), obtemos:

$$\underset{\sim}{c^x} = a \cdot b = c^y \cdot c^z = \underset{\sim}{c^{y+z}}$$

$\Rightarrow \boxed{x = y+z}$, Ou seja, obtemos que

$$\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b.$$

(e) Fica como exercício.

□

<u>Obs.:</u> As propriedades (c), (d) e (e) são conhecidas como PROPRIEDADES OPERATÓRIAS dos logaritmos

---